



simulationconcours.be

Mathématiques

Carnet d'entraînement

Relation de Chasles et combinaisons linéaires – TUTORIEL

Calcul vectoriel · Mécanique 2 — des exercices calibrés
concours, du plus simple au plus retors.

43 exercices

3 niveaux

corrigés détaillés

Comment bosser ce carnet

- ✓ Lis d'abord le tutoriel : la mécanique y est expliquée pas à pas
- ✓ Fais chaque niveau en entier **avant** d'ouvrir les corrigés
- ✓ Note à côté de chaque exo : réussi, hésité ou raté — et rejoue les ratés 48 h plus tard



simulationconcours.be

scanne & continue en ligne

Sommaire

- 1 Le tutoriel — la mécanique expliquée
- 2 Les exercices Facile x15 · Moyen x15 · Difficile x13
- 3 Les corrigés détaillés exercice par exercice

Le tutoriel

Ce document est un **carnet d'exercices** : on t'explique d'abord la mécanique, puis tu la travailles sur 43 exercices classés en trois niveaux. Les corrigés détaillés t'attendent en deuxième partie, après la page « Corrigés » — pas avant de l'avoir mérité.

❶ RAPPEL la relation de Chasles et ses deux réflexes

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

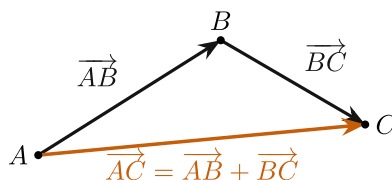
$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

- **Chasles** : quand l'extrémité d'un vecteur est l'origine du suivant, la lettre commune « s'efface » : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
- **Opposé** : échanger les deux lettres change le signe. On s'en sert pour transformer une soustraction en addition.
- **Vecteur nul** : $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$; il disparaît d'une somme.

🔗 L'ESSENTIEL le principe « bout à bout »

Additionner des vecteurs, c'est enchaîner des déplacements : on va de A à B , puis de B à C ... Le vecteur résultant relie l'origine du premier à l'extrémité du dernier. Tout l'art consiste à **réécrire** chaque terme (avec des opposés ou des équipollences) pour faire apparaître ces enchaînements.



☞ **MÉTHODE** *simplifier une somme de vecteurs*

- 1 **Transformer les soustractions** : remplacer $-\overrightarrow{XY}$ par $+\overrightarrow{YX}$.
- 2 **Réordonner** pour créer des enchaînements bout à bout (extrémité = origine suivante).
- 3 **Effacer les lettres intermédiaires** par Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
- 4 **Faire disparaître** tout $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ qui apparaît.

🔗 **EXEMPLE** *une chaîne à simplifier*

Simplifions $\vec{s} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$. Les termes sont déjà bout à bout :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}.$$

Donc $\vec{s} = \overrightarrow{AD}$.

🔗 **EXEMPLE** *transformer une soustraction*

Simplifions $\vec{t} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$. On écrit $-\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC}$, d'où

$$\vec{t} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

🌟 **L'ESSENTIEL** *règle du parallélogramme et combinaisons linéaires*

Quand deux vecteurs partent du même point A , leur somme est la diagonale du parallélogramme : si $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$, alors $ABCD$ est un parallélogramme. Réciproquement, dans un parallélogramme $ABCD$ (sommets dans l'ordre), les côtés opposés donnent $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$: ce sont ces égalités qui permettent d'exprimer un vecteur comme **combinaison linéaire** $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$ d'autres vecteurs.

⚠ PIÈGE *les fautes fréquentes*

- Chasles n'agit que si les vecteurs se *touchent* : extrémité de l'un = origine de l'autre. Sinon, on transforme d'abord (opposé ou équipollence).
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ ne se simplifie pas tel quel (pas de lettre commune bien placée).
- Ne pas oublier le signe : $-\overrightarrow{XY} = +\overrightarrow{YX}$ (on *inverse* les lettres, on ne se contente pas de changer le signe devant).

Les exercices

FACILE 15 exercices

Exo 1

Compléter par la relation de Chasles. Simplifier chaque somme en un seul vecteur.

a)

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

b)

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP}$$

c)

$$\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{ST} + \overrightarrow{TU}$$

d)

$$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HK}$$

Exo 2

Vecteur nul et opposés. Donner le résultat le plus simple de chaque expression.

a)

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$$

b)

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$$

c)

$$-\overrightarrow{DE} \text{ (l'exprimer comme un vecteur à lettres inversées)}$$

d)

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PQ}$$

Exo 3

Transformer une soustraction. Simplifier en utilisant $-\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{YX}$.

a)

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$$

b)

$$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

c)

$$\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MN}$$

Exo 4

Choisir un point intermédiaire. Dans chaque cas, décomposer le vecteur en passant par le point indiqué.

a)

Écrire $\overrightarrow{AC}$ en passant par B .

b)

Écrire $\overrightarrow{AD}$ en passant par B puis C .

c)

Écrire $\overrightarrow{MN}$ en passant par un point O quelconque.

Exo 5

Parallélogramme. $ABCD$ est un parallélogramme (sommets dans l'ordre). Compléter les égalités.

a)

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{D} ?$$

b)

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{B} ?$$

c)

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A} ? \text{ (règle du parallélogramme)}$$

Exo 6

Circuits fermés. Un « tour complet » qui revient à son point de départ vaut le vecteur nul. Simplifier.

a)

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$$

b)

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QM}$$

c)

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA}$$

Exo 7

Chasles à trous. Compléter la (les) lettre(s) manquante(s) pour que l'égalité soit vraie.

a)

$$\overrightarrow{A?} + ?\overrightarrow{C} = \overrightarrow{AC} \text{ (insérer un point } B\text{)}$$

b)

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{M?} + ?\overrightarrow{P} \text{ (insérer un point au choix)}$$

c)

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B?} + ?\overrightarrow{D} \text{ (insérer } C\text{)}$$

d)

$$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{F?}$$

Exo 8

Opposés et vecteurs égaux. Compléter par un vecteur à lettres inversées ou égal, puis simplifier si demandé.

a)

$$\overrightarrow{AB} + ? = \vec{0}$$

b)

$$-\overrightarrow{CD} = ?$$

c)

Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, exprimer $\overrightarrow{BA}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$.

d)

$\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{RQ}$: réécrire la soustraction en $\overrightarrow{PQ} + ?$, puis simplifier.

Exo 9

Vrai ou faux ? Justifier brièvement.

a)

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

b)

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}.$$

c)

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}.$$

d)

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}.$$

Exo 10

Une soustraction à transformer. Simplifier chaque expression en un seul vecteur.

a)

$$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$$

b)

$$\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$$

c)

$$\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{NP}$$

Exo 11

Milieu : premières égalités. I est le milieu du segment $[AB]$.

a)

Comparer $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{IB}$.

b)

Que vaut $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}$?

c)

Que vaut $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}$?

Exo 12

Vecteurs égaux et parallélogramme. On donne quatre points A, B, C, D tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

a)

Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

b)

En déduire une égalité entre $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$.

c)

Que vaut $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}$?

Exo 13

Chaînes mixtes. Transformer d'abord l'unique soustraction, puis simplifier en un seul vecteur.

a)

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC}$$

b)

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$$

c)

$$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}$$

Exo 14

Lecture d'un parallélogramme. $ABCD$ est un parallélogramme de centre O (point d'intersection des diagonales).

a)

Citer un côté du parallélogramme donnant un vecteur égal à $\overrightarrow{AB}$.

b)

Que vaut $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$?

c)

Comparer $\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{OC}$. Que représente alors O pour le segment $[AC]$?

Exo 15

Mise en situation : déplacements d'un randonneur. Un randonneur part de A , marche jusqu'à B , puis jusqu'à C , enfin jusqu'à D .

a)

Quel vecteur représente son déplacement total (du départ à l'arrivée) ?

b)

S'il revient ensuite directement en A , que vaut le déplacement total du parcours entier ?

c)

Soit I le milieu de l'étape $[BC]$. Quel vecteur représente le chemin qu'il lui reste pour atteindre C depuis I ?

MOYEN

15 exercices

Exo 1

Simplifier en un seul vecteur.

a)

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}$$

b)

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$

c)

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC}$$

d)

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$$

Exo 2

Introduire un point O . Soit O un point quelconque du plan. Exprimer les vecteurs suivants uniquement à l'aide de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$.

a)

$$\overrightarrow{AB}$$

b)

$$\overrightarrow{CA}$$

c)

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

Exo 3

Milieu. I est le milieu du segment $[AB]$.

a)

Exprimer $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

b)

Que vaut $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}$? Justifier.

c)

Montrer que, pour tout point O , $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

Exo 4

Diagonales d'un parallélogramme. $ABCD$ est un parallélogramme. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$.

a)

Exprimer la diagonale $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

b)

Exprimer la diagonale $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exo 5

Combinaison linéaire avec un milieu. $ABCD$ est un parallélogramme et I est le milieu du côté $[BC]$. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$.

a)

Exprimer $\overrightarrow{BI}$ en fonction de $\vec{v}$.

b)

En déduire $\overrightarrow{AI}$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exo 6

Simplifier des chaînes mixtes. Transformer les soustractions, réordonner, puis conclure en un seul vecteur.

a)

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$$

b)

$$\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}$$

c)

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$$

d)

$$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}$$

Exo 7

Une identité de Chasles. A, B, C, D sont quatre points quelconques.

a)

Démontrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$. (Indication : insérer un point dans un des vecteurs.)

b)

En déduire que $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$ sont égaux ; à quel vecteur ?

c)

Retrouver l'identité de a) à l'aide des vecteurs position depuis un point O .

Exo 8

Point aux deux tiers. P est le point défini par $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

a)

Exprimer $\overrightarrow{OP}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$, pour un point O quelconque.

b)

Exprimer $\overrightarrow{CP}$ en fonction de $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$, pour un point C quelconque.

c)

Où se situe P sur le segment $[AB]$?

Exo 9

Point défini par une combinaison. $ABCD$ est un parallélogramme ; on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. Le point E est défini par $\overrightarrow{AE} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$.

a)

Exprimer $\overrightarrow{BE}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

b)

Exprimer $\overrightarrow{DE}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

c)

Montrer que $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{AC}$. Qu'en déduit-on pour les droites (DE) et (AC) ?

Exo 10

Droite des milieux. ABC est un triangle. M est le milieu de $[AB]$ et N celui de $[AC]$.

a)

Exprimer $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b)

En déduire $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

c)

Montrer que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Qu'en déduit-on pour (MN) et (BC) ?

Exo 11

Chasles et coordonnées. Dans un repère orthonormé : $A(-1; 2)$, $B(3; -1)$, $C(4; 5)$.

a)

Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{BC}$.

b)

Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, puis celles de $\overrightarrow{AC}$. Que constate-t-on ?

c)

Justifier l'égalité observée par la relation de Chasles.

Exo 12

Les diagonales se coupent en leur milieu. $ABCD$ est un parallélogramme ; on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. On note I le milieu de $[AC]$ et J le milieu de $[BD]$.

a)

Exprimer $\overrightarrow{AI}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

b)

Exprimer $\overrightarrow{AJ}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$. (On rappelle $\overrightarrow{BD} = \vec{v} - \vec{u}$.)

c)

En déduire que $I = J$.

Exo 13

Point au quart. ABC est un triangle ; on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. P est le point de $[BC]$ tel que $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

a)

Exprimer $\overrightarrow{BC}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

b)

En déduire $\overrightarrow{BP}$.

c)

Exprimer $\overrightarrow{AP}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

Exo 14

Poids d'un point. A, B, C sont trois points et I le point défini par $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

a)

Exprimer $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$.

b)

Exprimer $\overrightarrow{CI}$ en fonction de $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AB}$.

c)

En déduire que $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$.

Exo 15

Relation de la médiane. ABC est un triangle et I le milieu de $[BC]$.

a)

En écrivant $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}$, montrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$.

b)

Montrer que, pour tout point M , $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$.

c)

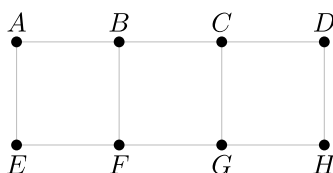
Retrouver que $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

DIFFICILE

13 exercices

Exo 1

Chaîne de vecteurs sur une grille. On considère la grille de points ci-dessous : les points du haut sont A, B, C, D et ceux du bas E, F, G, H , régulièrement espacés. On rappelle que deux « flèches » parallèles, de même longueur et de même sens sont *équipollentes* (elles représentent le même vecteur).



On pose $\vec{w} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FG} - \overrightarrow{EF}$.

a)

Justifier que $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EF}$ (équipollence sur la rangée du bas). Que vaut alors $\overrightarrow{FG} - \overrightarrow{EF}$?

b)

Simplifier $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$ par la relation de Chasles.

c)

En déduire $\vec{w}$ sous la forme d'un unique vecteur $\overrightarrow{XY}$ de la grille.

Exo 2

Combinaison linéaire dans un parallélogramme (type concours). $PQRS$ est un parallélogramme (sommets dans l'ordre). On note M le milieu de $[PS]$ et N le milieu de $[PQ]$.

a)

Exprimer $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PS}$. (Indication : passer par P : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN}$.)

b)

Justifier que $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{RS}$ (côtés opposés du parallélogramme).

c)

En déduire l'expression de $2\overrightarrow{MN}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{PS}$ et $\overrightarrow{RS}$.

Exo 3

Quatrième sommet et centre d'un parallélogramme. Dans un repère orthonormé, on donne $A(1; 2)$, $B(5; 3)$ et $C(6; 7)$. On veut compléter le parallélogramme $ABCD$ (sommets dans l'ordre).

a)

Traduire la condition « $ABCD$ parallélogramme » par une égalité vectorielle reliant $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$, puis en déduire les coordonnées de D .

b)

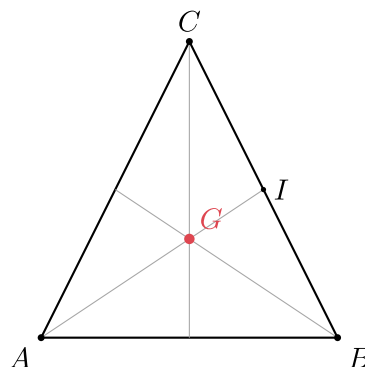
Vérifier le résultat en contrôlant que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

c)

Déterminer les coordonnées du centre I du parallélogramme (point d'intersection des diagonales).

Exo 4

Centre de gravité d'un triangle. ABC est un triangle. Son centre de gravité G est le point défini par $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.



a)

Montrer que, pour tout point O , $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

b)

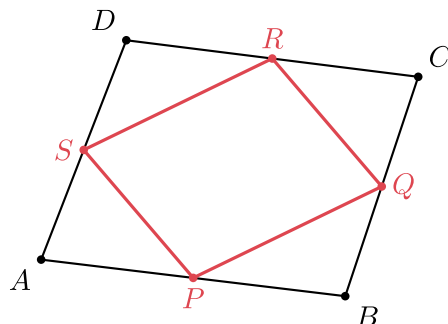
En prenant $O = A$ et en notant I le milieu de $[BC]$, montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.

c)

On donne $A(0; 0)$, $B(6; 0)$, $C(3; 6)$. Calculer les coordonnées de G .

Exo 5

Théorème de Varignon. $ABCD$ est un quadrilatère *quelconque*. On note P, Q, R, S les milieux respectifs des côtés $[AB], [BC], [CD], [DA]$.



a)

Montrer que $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. (Indication : $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ}$.)

b)

Montrer de même que $\overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

c)

En déduire que $PQRS$ est un parallélogramme.

Exo 6

Une longue chaîne à démêler. On considère $\vec{s} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FA}$.

a)

Transformer chaque soustraction à l'aide de $-\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{YX}$.

b)

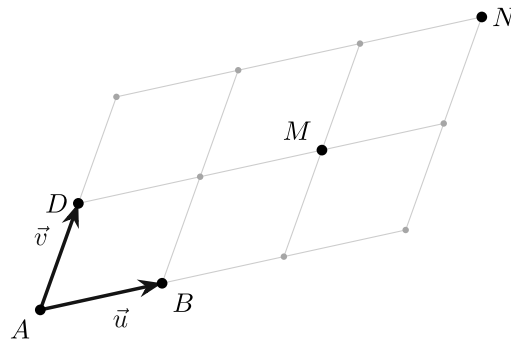
Réordonner les six termes pour former une chaîne « bout à bout ».

c)

Conclure la valeur de $\vec{s}$.

Exo 7

Décomposition dans une base (grille oblique). Sur la grille oblique ci-dessous, tous les déplacements d'un nœud à l'autre s'expriment à l'aide de $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$.



a)

Exprimer $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

b)

En déduire $\overrightarrow{BM}$.

c)

Calculer $\overrightarrow{MN}$ et montrer que M est le milieu de $[BN]$.

Exo 8

Point à coefficients (barycentre). A et B sont deux points ; I est le point défini par $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

a)

Montrer que $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$.

b)

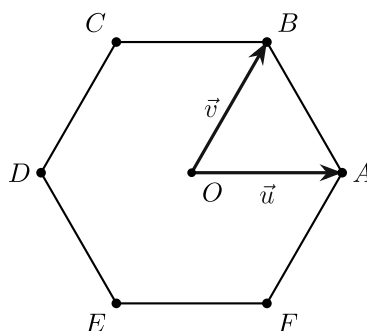
Montrer que, pour tout point O , $\overrightarrow{OI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{OB}$.

c)

On donne $A(1; 2)$ et $B(6; 7)$. Calculer les coordonnées de I .

Exo 9

Hexagone régulier. $ABCDEF$ est un hexagone régulier de centre O . On pose $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.



a)

Justifier que $OABC$ est un losange, en déduire $\overrightarrow{OC} = \vec{v} - \vec{u}$. Justifier aussi $\overrightarrow{OD} = -\vec{u}$.

b)

En déduire $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

c)

Exprimer $\overrightarrow{AD}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$, puis montrer que O est le milieu de $[AD]$.

Exo 10

Le triangle des milieux. ABC est un triangle ; on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. M, N, P sont les milieux respectifs de $[AB], [AC], [BC]$.

a)

Exprimer $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AP}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

b)

Calculer $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

c)

Montrer que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$ et en déduire que $AMPN$ est un parallélogramme.

Exo 11

Combinaison en coordonnées. Dans un repère orthonormé : $A(-2; 1), B(2; 3), C(1; -2)$.

a)

Déterminer les coordonnées du point M défini par $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

b)

Montrer, par le calcul vectoriel puis par les coordonnées, que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CB}$. En déduire que B est le milieu de $[CM]$.

c)

Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.

Exo 12

Un point défini par une relation. ABC est un triangle et G son centre de gravité. On admet (cf. exercice 4) que, pour tout point M , $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

a)

Pour $A(0; 0), B(6; 0), C(3; 6)$, donner les coordonnées de G .

b)

On cherche le point M vérifiant $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$. Montrer que cette condition équivaut à $\overrightarrow{GM} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

c)

En déduire les coordonnées de M .

Exo 13

Synthèse : combinaisons dans un parallélogramme. $ABCD$ est un parallélogramme ; on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. E est le milieu de $[CD]$ et F le point de $[BC]$ tel que $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

a)

Exprimer $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

b)

En déduire $\overrightarrow{EF}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

c)

Déterminer les réels α et β tels que $\overrightarrow{AF} = \alpha \overrightarrow{AE} + \beta \overrightarrow{AC}$.



DEUXIÈME PARTIE

Corrigés

Chaque exercice repris pas à pas, niveau par niveau.
Compare ta démarche, pas seulement ton résultat.





Une seconde – avant d'ouvrir le corrigé...



Si ce carnet t'aide, rends-nous la pareille : parle de simulationconcours.be à quelqu'un qui prépare le concours. C'est comme ça qu'on peut continuer.

Ce qu'on a préparé pour toi

- ✓ Ce carnet en interactif, avec correction en un clic
- ✓ Les cours complets, chapitre par chapitre – gratuits
- ✓ 3100 QCM type concours, corrigés et expliqués
- ✓ Des fiches de révision à imprimer

Tous les jeudis : simulation du concours en ligne

En conditions réelles – chrono, QCM type concours et score immédiat.



Rejoins-nous sur simulationconcours.be

scanne le QR ou tape l'adresse – puis reviens vérifier tes réponses

Les corrigés

FACILE 15 exercices

Exo 1

a)

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

b)

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}.$$

c)

$$\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{ST} + \overrightarrow{TU} = \overrightarrow{RU}.$$

d)

$$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HK} = \overrightarrow{EK}.$$

► La lettre intermédiaire commune s'efface à chaque étape ; il reste la première et la dernière.

Exo 2

a)

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}.$$

b)

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}.$$

c)

$$-\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{ED}.$$

d)

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PQ} = \vec{0} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ}.$$

► Un circuit fermé (on revient au point de départ) donne toujours le vecteur nul.

Exo 3

a)

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

b)

$$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} ? \text{ Non : on écrit } -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}, \text{ donc } \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}.$$

c)

$$\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{NP}.$$

► Règle utile : $\overrightarrow{XA} - \overrightarrow{XB} = \overrightarrow{BA}$ (les origines communes X « disparaissent », il reste « extrémité de gauche moins celle de droite »). Ici b) : $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.

Exo 4

a)

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

b)

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}.$$

c)

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON} \text{ (valable pour n'importe quel point } O \text{)}.$$

► On peut toujours *insérer* un point : c'est Chasles lu de droite à gauche.

Exo 5

a)

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \text{ (côtés opposés du parallélogramme).}$$

b)

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.$$

c)

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \text{ (diagonale issue de } A \text{)}.$$

► Dans $ABCD$ pris dans l'ordre, les côtés opposés sont des vecteurs *égaux* : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Exo 6

a)

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}.$$

b)

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QM} = \overrightarrow{MM} = \vec{0}.$$

c)

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}.$$

► Dès qu'on revient au point de départ, la chaîne se referme : le résultat est $\vec{0}$.

Exo 7

a)

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \text{ (la lettre insérée est } B).$$

b)

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} \text{ (n'importe quel point convient, ici } N).$$

c)

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \text{ (la lettre insérée est } C).$$

d)

$$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} \text{ (la lettre manquante est } G).$$

► La lettre de sortie d'un vecteur doit être la lettre d'entrée du suivant.

Exo 8

a)

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0} : \text{le vecteur cherché est } \overrightarrow{BA}.$$

b)

$$-\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DC}.$$

c)

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CD}, \text{ donc } \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}.$$

d)

$$-\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{QR}, \text{ donc } \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}.$$

► Inverser les deux lettres d'un vecteur, c'est prendre son opposé.

Exo 9

a)

Vrai : c'est la relation de Chasles (B commune, bien placée).

b)

Faux : $B \neq C$, les vecteurs ne se touchent pas, la somme ne se simplifie pas ainsi.

c)

$$\textbf{Faux} : \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}, \text{ et non } \overrightarrow{BC}.$$

d)

Vrai : échanger les lettres change le signe.

► Chasles n'agit que si extrémité de l'un = origine de l'autre.

Exo 10

a)

$$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}.$$

b)

$$\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB}.$$

c)

$$\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{MN}.$$

► Règle : lorsque les deux vecteurs ont la *même extrémité*, $\overrightarrow{XZ} - \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XY}$.

Exo 11

a)

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$: même direction, même sens, même longueur (le milieu partage $[AB]$ en deux).

b)

$$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AB}.$$

c)

$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$: $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont opposés.

► Attention à ne pas confondre $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Exo 12

a)

$ABCD$ est un **parallélogramme** : les côtés opposés $[AB]$ et $[DC]$ portent des vecteurs égaux, donc sont parallèles et de même longueur.

b)

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ (l'autre paire de côtés opposés).

c)

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \vec{0} \text{ (puisque } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \text{)}.$$

► $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff ABCD$ parallélogramme (sommets pris dans l'ordre).

Exo 13

a)

$$-\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CD} : \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}.$$

b)

$$-\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC} : \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}.$$

c)

$$-\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB} : \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}.$$

► On commence toujours par transformer la soustraction, ensuite Chasles s'applique.

Exo 14

a)

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \text{ (côté opposé).}$$

b)

$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AC}.$$

c)

$$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}, \text{ donc } O \text{ est le milieu de } [AC] : \text{ les diagonales se coupent en leur milieu.}$$

► Le centre d'un parallélogramme est le milieu commun des deux diagonales.

Exo 15

a)

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} : \text{seuls comptent le départ } A \text{ et l'arrivée } D.$$

b)

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0} : \text{le parcours se referme.}$$

c)

$$I \text{ milieu de } [BC], \text{ donc le chemin restant est } \overrightarrow{IC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

► Une somme de déplacements « bout à bout » ne retient que l'origine du premier et l'extrémité du dernier.

MOYEN

15 exercices

Exo 1

a)

$$\text{On réordonne : } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}.$$

b)

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}.$$

c)

$$-\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CD}, \text{ donc } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}.$$

d)

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BA}.$$

► Règle express : $\overrightarrow{XA} - \overrightarrow{XB} = \overrightarrow{BA}$ (origine commune X éliminée). Ex. b) et d).

Exo 2

a)

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

b)

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}.$$

c)

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}.$$

► Tout vecteur $\overrightarrow{XY}$ s'écrit $\overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX}$: c'est le passage aux *vecteurs position* depuis l'origine O .

Exo 3

a)

$$I \text{ milieu de } [AB] : \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}.$$

b)

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} : \text{ comme } I \text{ est le milieu, } \overrightarrow{IA} \text{ et } \overrightarrow{IB} \text{ sont opposés (même longueur, sens contraires).}$$

c)

$$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

► La formule $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ traduit « le milieu est la moyenne des deux points ».

Exo 4

a)

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{u} + \vec{v} \text{ (règle du parallélogramme).}$$

b)

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{v} - \vec{u}.$$

► Une diagonale est la *somme* des côtés issus du même sommet, l'autre en est la *différence*.

Exo 5

a)

I milieu de $[BC]$: $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Or $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \vec{v}$ (côtés opposés), donc $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\vec{v}$.

b)

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}.$$

► On décompose le trajet $A \rightarrow I$ en $A \rightarrow B$ puis $B \rightarrow I$, puis on remplace chaque morceau par $\vec{u}$ ou $\vec{v}$.

Exo 6

a)

$$-\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC} : \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}.$$

b)

$$-\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DB} : \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

c)

$$\text{On réordonne : } \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CC} = \vec{0}.$$

d)

$$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} \text{ (origine commune } A), \text{ puis } -\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CD} : \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD}.$$

► On transforme toujours les soustractions *avant* de chercher les enchaînements.

Exo 7

a)

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.$$

b)

En réarrangeant a) : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$. Chacun vaut $\overrightarrow{DB}$ (règle de l'origine commune : $\overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XD} = \overrightarrow{DB}$).

c)

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC})$ et $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})$: les deux valent $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$, donc sont égaux.

► Cette identité dit simplement que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ ne dépend que des « deux entrées » et des « deux sorties ».

Exo 8

a)

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}.$$

b)

$$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}.$$

c)

P est situé aux deux tiers de $[AB]$ à partir de A .

► Les coefficients $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$ sont les « poids » de A et B ; leur somme vaut 1.

Exo 9

a)

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} = 2\vec{u} + 3\vec{v} - \vec{u} = \vec{u} + 3\vec{v}.$$

b)

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = 2\vec{u} + 3\vec{v} - \vec{v} = 2\vec{u} + 2\vec{v}.$$

c)

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{u} + \vec{v}$, donc $2\overrightarrow{AC} = 2\vec{u} + 2\vec{v} = \overrightarrow{DE}$: les droites (DE) et (AC) sont parallèles.

► Pour un point donné par $\overrightarrow{AE} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, on obtient $\overrightarrow{XE}$ en soustrayant $\overrightarrow{AX}$.

Exo 10

a)

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

b)

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}).$$

c)

$$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}, \text{ donc } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} : (MN) \parallel (BC) \text{ et } MN = \frac{1}{2}BC.$$

► C'est le théorème de la droite des milieux, lu vectoriellement.

Exo 11

a)

$$\overrightarrow{AB} = (3 - (-1); -1 - 2) = (4; -3) \text{ et } \overrightarrow{BC} = (4 - 3; 5 - (-1)) = (1; 6).$$

b)

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (5; 3); \overrightarrow{AC} = (4 - (-1); 5 - 2) = (5; 3) : \text{mêmes coordonnées.}$$

c)

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \text{ (Chasles), les vecteurs sont donc égaux et ont les mêmes coordonnées.}$$

► Chasles se lit aussi « composante par composante » : c'est la cohérence des deux points de vue.

Exo 12

a)

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}).$$

b)

$$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} = \vec{u} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \vec{u} + \frac{1}{2}(\vec{v} - \vec{u}) = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}).$$

c)

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AJ}, \text{ donc } I = J : \text{les deux diagonales ont le même milieu.}$$

► C'est la caractérisation vectorielle du parallélogramme par ses diagonales.

Exo 13

a)

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{v} - \vec{u}.$$

b)

$$\overrightarrow{BP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{4}(\vec{v} - \vec{u}).$$

c)

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \vec{u} + \frac{1}{4}(\vec{v} - \vec{u}) = \frac{3}{4}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v}.$$

► Un point du segment $[BC]$ s'écrit toujours $\overrightarrow{AP} = (1 - t)\vec{u} + t\vec{v}$ avec ici $t = \frac{1}{4}$.

Exo 14

a)

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}.$$

b)

$$\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}.$$

c)

$$\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CB}.$$

► Les poids $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$ traduisent que I est « aux trois quarts » de A vers B .

Exo 15

a)

En additionnant : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI} + (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC})$. Comme I est le milieu de $[BC]$, $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$, d'où $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$.

b)

$$\text{De même, } \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}) = 2\overrightarrow{MI} + (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) = 2\overrightarrow{MI}.$$

c)

En prenant $M = I$ dans b) : $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{II} = \vec{0}$.

► La relation $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$ est le point de départ des calculs de médianes et de barycentres.

DIFFICILE

13 exercices

Exo 1

a)

Sur la rangée du bas, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont deux « pas » d'une case vers la droite : même direction, même sens, même longueur, donc $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EF}$. Par conséquent $\overrightarrow{FG} - \overrightarrow{EF} = \vec{0}$.

b)

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF} \text{ (Chasles : la lettre } B \text{ s'efface).}$$

c)

$$\text{Il reste } \vec{w} = \overrightarrow{AF} + \vec{0} = \boxed{\overrightarrow{AF}}.$$

► On repère d'abord les termes qui *se compensent* grâce à l'équipollence, puis on enchaîne le reste par Chasles.

Exo 2

a)

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN}$. Comme M est le milieu de $[PS]$, $\overrightarrow{MP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{PS}$; comme N est le milieu de $[PQ]$, $\overrightarrow{PN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$. Donc

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} - \frac{1}{2}\overrightarrow{PS}.$$

b)

Dans le parallélogramme $PQRS$, les côtés $[PQ]$ et $[RS]$ sont opposés et parcourus en sens contraires, donc $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{RS}$.

c)

$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PS} = -\overrightarrow{RS} - \overrightarrow{PS}$, soit

$$\boxed{2\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{PS} - \overrightarrow{RS}}.$$

► C'est exactement le mécanisme d'une question de concours : décomposer via un sommet commun (P), puis remplacer $\overrightarrow{PQ}$ à l'aide des côtés opposés.

Exo 3

a)

$ABCD$ parallélogramme $\iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Or $\overrightarrow{AB}(5-1; 3-2) = (4; 1)$ et $\overrightarrow{DC} = (6-x_D; 7-y_D)$. L'égalité donne $6-x_D = 4$ et $7-y_D = 1$, d'où $x_D = 2, y_D = 6$: $\boxed{D(2; 6)}$.

b)

$\overrightarrow{AD}(2-1; 6-2) = (1; 4)$ et $\overrightarrow{BC}(6-5; 7-3) = (1; 4)$: on a bien $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Le quadrilatère est un parallélogramme.

c)

Le centre I est le milieu commun des deux diagonales. Milieu de $[AC]$: $I\left(\frac{1+6}{2}; \frac{2+7}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}; \frac{9}{2}\right) = (3,5; 4,5)$. (Vérification par $[BD]$: $\left(\frac{5+2}{2}; \frac{3+6}{2}\right) = (3,5; 4,5)$.)

► Traduire une propriété géométrique (parallélogramme) par une *égalité vectorielle*, puis passer aux coordonnées : c'est le pont entre le Thème 1 et le Thème 2.

Exo 4

a)

On insère O dans chaque terme : $\overrightarrow{GX} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OX}$. La relation $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ devient $3\overrightarrow{GO} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \vec{0}$, d'où

$$\overrightarrow{OG} = -\overrightarrow{GO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

b)

Avec $O = A$: $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. Or, I étant le milieu de $[BC]$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$; donc $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$: G est sur la médiane $[AI]$, aux deux tiers à partir de A .

c)

$$G = \frac{1}{3}((0; 0) + (6; 0) + (3; 6)) = \frac{1}{3}(9; 6) = (3; 2).$$

► La formule $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ est l'isobarycentre : « moyenne des trois points ».

Exo 5

a)

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

b)

$$\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

c)

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$: un côté est égal (même direction, même longueur, même sens) à son opposé, donc $PQRS$ est un parallélogramme.

► Les milieux des côtés d'un quadrilatère *quelconque* forment toujours un parallélogramme (dont les côtés sont parallèles aux diagonales $[AC]$ et $[BD]$).

Exo 6

a)

$$-\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CD} \text{ et } -\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{EF}, \text{ donc } \vec{s} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA}.$$

b)

Les termes forment la chaîne $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow A$.

c)

C'est un circuit fermé : $\vec{s} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

► Une somme dont les lettres s'enchaînent et reviennent au départ est nulle, quel que soit le nombre de termes.

Exo 7

a)

En lisant la grille : $\overrightarrow{AM} = 2\vec{u} + \vec{v}$ et $\overrightarrow{AN} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$.

b)

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = (2\vec{u} + \vec{v}) - \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}.$$

c)

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = (3\vec{u} + 2\vec{v}) - (2\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} + \vec{v}. \text{ Ainsi } \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MN} : M \text{ est le milieu de } [BN].$$

► Dans une base $(\vec{u}, \vec{v})$, comparer deux vecteurs revient à comparer leurs coefficients.

Exo 8

a)

$$\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}, \text{ donc } 2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = 5\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}, \text{ d'où } \overrightarrow{IA} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}, \text{ soit } \overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}.$$

b)

$$2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0} \text{ donne } 2(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OI}) + 3(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OI}) = \vec{0}, \text{ donc } 5\overrightarrow{OI} = 2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}, \text{ soit } \overrightarrow{OI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{OB}.$$

c)

$$I = \frac{1}{5}(2A + 3B) = \frac{1}{5}((2; 4) + (18; 21)) = \frac{1}{5}(20; 25) = (4; 5).$$

► Les coefficients $\frac{2}{5}$ et $\frac{3}{5}$ (de somme 1) sont les poids normalisés 2 et 3.

Exo 9

a)

Les triangles OAB et OBC sont équilatéraux (leurs côtés valent le rayon), donc $OABC$ a ses quatre côtés égaux : c'est un losange. Sa diagonale issue de O vaut la somme des côtés : $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$, d'où $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{v} - \vec{u}$. Comme D est diamétralement opposé à A , $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OA} = -\vec{u}$.

b)

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{v} - \vec{u}; \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (\vec{v} - \vec{u}) - \vec{u} = \vec{v} - 2\vec{u}.$$

c)

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = -\vec{u} - \vec{u} = -2\vec{u}$. De plus $\overrightarrow{OD} = -\vec{u} = -\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AO}$, donc $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OD}$: O est le milieu de $[AD]$.

► La grande diagonale d'un hexagone régulier passe par le centre, qui en est le milieu.

Exo 10

a)

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{u}; \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\vec{v}; \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \vec{u} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \vec{u} + \frac{1}{2}(\vec{v} - \vec{u}) = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}.$$

b)

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\vec{v} - \vec{u}); \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{v}.$$

c)

$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} = \overrightarrow{AP}$. La règle du parallélogramme donne alors : $AMPN$ est un parallélogramme (de diagonale $[AP]$). On le confirme par $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\vec{v} = \overrightarrow{AN}$.

► Les milieux M, N, P découpent le triangle en quatre triangles superposables ; $AMPN$ en est un « pavé ».

Exo 11

a)

$$\overrightarrow{AB} = (4; 2), \overrightarrow{AC} = (3; -3), \text{ donc } 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = (8 - 3; 4 + 3) = (5; 7). \text{ Ainsi } M = A + (5; 7) = (3; 8).$$

b)

Vectoriellement : $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = (2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$. Par les coordonnées : $\overrightarrow{BM} = (3 - 2; 8 - 3) = (1; 5)$ et $\overrightarrow{CB} = (2 - 1; 3 - (-2)) = (1; 5)$: égaux. Comme $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BM}$, B est le milieu de $[CM]$.

c)

$$ABDC \text{ parallélogramme} \iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}, \text{ donc } \overrightarrow{CD} = (4; 2) \text{ et } D = C + (4; 2) = (5; 0).$$

► Une combinaison $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ se calcule composante par composante ; l'interprétation géométrique vient ensuite.

Exo 12

a)

$$G = \frac{1}{3}(0 + 6 + 3; 0 + 0 + 6) = (3; 2).$$

b)

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$, donc l'égalité $3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{AB}$ équivaut à $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{GM} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

c)

$\overrightarrow{AB} = (6; 0)$, donc $\overrightarrow{GM} = -\frac{1}{3}(6; 0) = (-2; 0)$ et $M = G + (-2; 0) = (1; 2)$.

► On ramène une équation vectorielle « à trois termes » à un seul point G , puis on résout.

Exo 13

a)

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \vec{v} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{u}$ (car $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \vec{u}$), soit $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v}$. De même $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \vec{u} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$ (car $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \vec{v}$).

b)

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} = (\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}) - (\frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v}) = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{v}$.

c)

$\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$. On résout $\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} = \alpha(\frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v}) + \beta(\vec{u} + \vec{v})$:

$$\text{coeff. de } \vec{u} : \frac{1}{2}\alpha + \beta = 1, \quad \text{coeff. de } \vec{v} : \alpha + \beta = \frac{1}{3}.$$

Par différence, $-\frac{1}{2}\alpha = \frac{2}{3}$, d'où $\alpha = -\frac{4}{3}$ et $\beta = \frac{1}{3} - \alpha = \frac{5}{3}$. Ainsi $\overrightarrow{AF} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{5}{3}\overrightarrow{AC}$.

► Décomposer dans une base $(\vec{u}, \vec{v})$ transforme une égalité vectorielle en un système sur les coefficients : c'est le cœur des questions de concours.



Tous les exos cochés ? Passe au niveau réel.

+

Ce carnet est un extrait de notre bibliothèque d'entraînement — la suite se joue en ligne.

Sur simulationconcours.be

- ✓ Le même carnet en interactif, avec correction en un clic
- ✓ Les autres mécaniques de la fiche, niveau par niveau
- ✓ 3100 QCM type concours, corrigés et expliqués
- ✓ Les cours complets — gratuits — et les fiches de révision

Tous les jeudis : simulation du concours en ligne

En conditions réelles — chrono, QCM type concours et score immédiat.



Rejoins-nous sur simulationconcours.be

scanne le QR ou tape l'adresse — les cours complets sont gratuits