



simulationconcours.be

Mathématiques

Carnet d'entraînement

Composantes et norme d'un⁺ vecteur

Calcul vectoriel · Mécanique 1 — des exercices calibrés
concours, du plus simple au plus retors.

44 exercices

3 niveaux

corrigés détaillés

Comment bosser ce carnet

- ✓ Lis d'abord le tutoriel : la mécanique y est expliquée pas à pas
- ✓ Fais chaque niveau en entier **avant** d'ouvrir les corrigés
- ✓ Note à côté de chaque exo : réussi, hésité ou raté — et rejoue les ratés 48 h plus tard



simulationconcours.be

scanne & continue en ligne

Sommaire

- 1 Le tutoriel — la mécanique expliquée
- 2 Les exercices Facile x15 · Moyen x15 · Difficile x14
- 3 Les corrigés détaillés exercice par exercice

Le tutoriel

Ce document est un **carnet d'exercices** : on t'explique d'abord la mécanique, puis tu la travailles sur 44 exercices classés en trois niveaux. Les corrigés détaillés t'attendent en deuxième partie, après la page « Corrigés » — pas avant de l'avoir mérité.

Tout le calcul vectoriel repose sur **une seule opération** : transformer deux points en un couple de nombres, les **composantes** du vecteur. Une fois ce réflexe acquis, normes, angles, colinéarité et produit scalaire deviennent de simples calculs. Ce thème installe donc le geste fondateur.

❶ RAPPEL les deux formules du thème

Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ dans un repère, alors

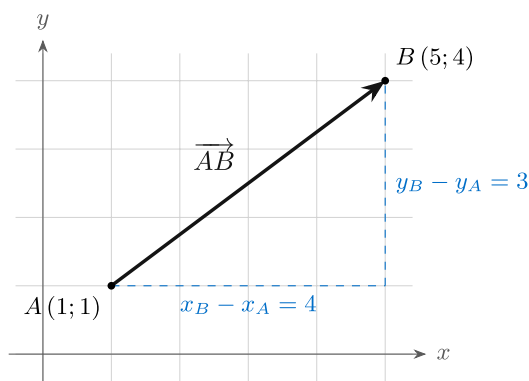
$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

- les **composantes** = « extrémité moins origine », coordonnée par coordonnée ;
- la **norme** = longueur du vecteur, *toujours* positive ou nulle.

🔗 L'ESSENTIEL d'où vient la racine carrée ?

La norme n'est rien d'autre que le **théorème de Pythagore**. Les deux composantes $(x_B - x_A)$ et $(y_B - y_A)$ sont les deux côtés d'un triangle rectangle ; le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en est l'hypoténuse. Sa longueur est donc la racine de la somme des carrés des deux côtés.



Les composantes $(4; 3)$ sont les côtés du triangle rectangle ; la norme $\|\vec{AB}\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ en est l'hypoténuse.

☞ **MÉTHODE** *calculer les composantes puis la norme de $\vec{AB}$*

- 1 Repérer clairement l'**origine** A (départ de la flèche) et l'**extrémité** B .
- 2 Composantes : soustraire « B moins A », coordonnée par coordonnée : $(x_B - x_A ; y_B - y_A)$. Jamais l'inverse !
- 3 Norme : élever *chaque composante* au carré, additionner, prendre la racine.
- 4 Laisser la norme sous forme **exacte** ($\sqrt{13}$, $2\sqrt{5}$...) sauf si une valeur approchée est demandée.

🔗 **EXEMPLE** *un calcul complet, pas à pas*

Soit $A(-1; 2)$ et $B(3; -1)$.

Composantes (extrémité moins origine) :

$$\vec{AB} (3 - (-1); -1 - 2) = \vec{AB} (4; -3).$$

Norme (Pythagore) :

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5.$$

La première composante $+4$ se lit « 4 vers la droite », la seconde -3 « 3 vers le bas ».

🔗 **EXEMPLE** *garder la forme exacte avec un radical*

Soit $C(0; 0)$ et $D(2; \sqrt{5})$. Alors $\vec{CD} (2; \sqrt{5})$ et

$$\|\vec{CD}\| = \sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{4 + 5} = \sqrt{9} = 3.$$

On n'écrit pas $\sqrt{5} \approx 2,24$: on garde $(\sqrt{5})^2 = 5$, c'est *exact* et bien plus simple.

⚠ PIÈGE les erreurs qui coûtent des points

- **Sens de la soustraction** : $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; \dots)$, pas $(x_A - x_B; \dots)$. Inverser donne le vecteur *opposé* $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ (même longueur, sens contraire).
- **Le carré d'un négatif est positif** : $(-3)^2 = +9$, pas -9 . La norme ne peut jamais être négative.
- $(\sqrt{5})^2 = 5$ et non $5^2 = 25$. Un radical au carré « disparaît ».
- Ne pas confondre les *composantes* (un couple de nombres) et la *norme* (un seul nombre positif).
- **Unité** : si les coordonnées sont en kilomètres, composantes *et* norme sont en kilomètres ; en mathématiques « pures », ce sont de simples nombres.

Les exercices

FACILE 15 exercices

Exo 1

Composantes « extrémité moins origine ». Dans un repère, on donne plusieurs couples de points. Calculer les composantes du vecteur demandé.

a)

$A(1; 2)$ et $B(4; 6)$: composantes de $\overrightarrow{AB}$.

b)

$C(0; 3)$ et $D(5; 3)$: composantes de $\overrightarrow{CD}$.

c)

$E(2; 7)$ et $F(2; 1)$: composantes de $\overrightarrow{EF}$.

d)

$G(3; 5)$ et $H(0; 0)$: composantes de $\overrightarrow{GH}$.

Exo 2

Norme à partir des composantes. Calculer la norme de chacun des vecteurs suivants (donnés par leurs composantes).

a)

$\vec{u}(3; 4)$

b)

$\vec{v}(6; 8)$

c)

$\vec{w}(5; 0)$

d)

$\vec{t}(2; 3)$

Exo 3

Le calcul complet. On donne $A(1; 1)$ et $B(4; 5)$.

a)

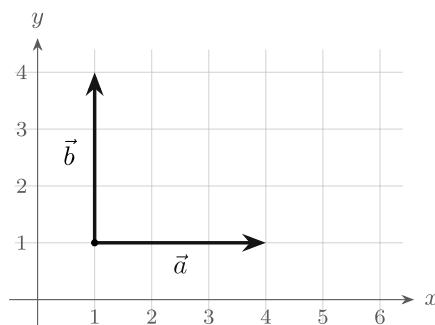
Déterminer les composantes de $\overrightarrow{AB}$.

b)

En déduire la norme $\|\overrightarrow{AB}\|$ (forme exacte).

Exo 4

Lecture sur une figure. Lire directement sur la figure les composantes des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, puis calculer leurs normes.



Exo 5

Vecteur opposé. On donne $A(2; 5)$ et $B(7; 1)$.

a)

Calculer les composantes de $\overrightarrow{AB}$, puis celles de $\overrightarrow{BA}$.

b)

Que remarque-t-on entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$? Comparer $\|\overrightarrow{AB}\|$ et $\|\overrightarrow{BA}\|$.

Exo 6

Distance entre deux points. Calculer la longueur AB (distance entre les deux points), sous forme exacte.

a)

$A(1; 1)$ et $B(4; 5)$.

b)

$A(2; 1)$ et $B(8; 9)$.

c)

$A(0; 2)$ et $B(5; 14)$.

d)

$A(-1; -2)$ et $B(7; 13)$.

Exo 7

Composantes puis nature du vecteur. Pour chaque couple, donner les composantes de $\overrightarrow{AB}$, puis préciser si le vecteur est *horizontal*, *vertical*, *nul* ou *oblique*.

a)

$A(2; 5)$ et $B(7; 5)$.

b)

$A(3; 1)$ et $B(3; 8)$.

c)

$A(4; -2)$ et $B(4; -2)$.

d)

$A(1; 1)$ et $B(4; 5)$.

Exo 8

Deux vecteurs sont-ils égaux ? Deux vecteurs sont égaux lorsqu'ils ont *les mêmes composantes*. Dans chaque cas, calculer les composantes des deux vecteurs et dire s'ils sont égaux.

a)

$\overrightarrow{AB}$ avec $A(1; 2)$, $B(4; 6)$ et $\overrightarrow{CD}$ avec $C(0; -1)$, $D(3; 3)$.

b)

$\overrightarrow{EF}$ avec $E(2; 1)$, $F(5; 2)$ et $\overrightarrow{GH}$ avec $G(0; 0)$, $H(3; -1)$.

Exo 9

Produit d'un vecteur par un nombre. On donne $\vec{u}(3; 4)$.

a)

Donner les composantes de $2\vec{u}$, de $3\vec{u}$ et de $-\vec{u}$.

b)

Calculer $\|\vec{u}\|$, puis en déduire $\|2\vec{u}\|$ et $\|3\vec{u}\|$ sans nouveau calcul de racine.

Exo 10

Somme et différence de deux vecteurs. On donne $\vec{u}(2; 1)$ et $\vec{v}(1; 3)$.

a)

Donner les composantes de $\vec{u} + \vec{v}$.

b)

Donner les composantes de $\vec{u} - \vec{v}$.

c)

Calculer $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\|$ (forme exacte).

Exo 11

Un déplacement décrit avec des mots. Sur un quadrillage, un pion part du point $A(3; 2)$. Il se déplace de 3 cases vers la droite, puis de 4 cases vers le haut, et arrive en B .

a)

Donner les composantes de $\overrightarrow{AB}$.

b)

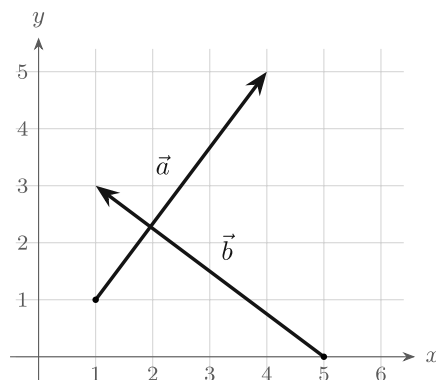
En déduire les coordonnées de B .

c)

Calculer $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Exo 12

Lecture de vecteurs obliques sur une figure. Lire sur la figure les composantes des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, puis calculer leurs normes.



Exo 13

Normes en forme exacte. Calculer la norme des vecteurs suivants. Les résultats ne sont pas entiers : laisser la réponse sous forme exacte (un radical).

a)

$\vec{u}(2; 3)$

b)

$\vec{v}(1; -1)$

c)

$\vec{w}(3; 1)$

d)

$$\vec{t}(1; 2)$$

Exo 14

Comparer des longueurs. On donne trois vecteurs $\vec{u}(6; 0)$, $\vec{v}(3; 4)$ et $\vec{w}(0; 7)$.

a)

Calculer les trois normes $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et $\|\vec{w}\|$.

b)

Ranger les trois vecteurs du plus court au plus long.

Exo 15

Chemin parcouru et distance directe. Un robot part de $A(0; 0)$, va en $B(3; 0)$, puis en $C(3; 4)$.

a)

Calculer les longueurs AB et BC , puis la distance *totale* parcourue $AB + BC$.

b)

Calculer la distance *directe* AC (à vol d'oiseau).

c)

Comparer les deux résultats.

MOYEN

15 exercices

Exo 1

Composantes et norme avec des coordonnées négatives. Pour chaque couple, donner les composantes de $\overrightarrow{AB}$ puis sa norme (forme exacte).

a)

$A(-2; 3)$ et $B(1; -1)$.

b)

$A(4; -2)$ et $B(-1; -2)$.

c)

$A(-3; -1)$ et $B(-3; 5)$.

Exo 2

Simplifier une norme sous la forme $a\sqrt{b}$. Calculer et *simplifier* la norme des vecteurs suivants.

a)

$$\vec{u}(4; -2)$$

b)

$$\vec{v}(-6; 3)$$

c)

$$\vec{w}(2\sqrt{3}; 2)$$

Exo 3

Retrouver un point à partir d'un vecteur.

a)

On sait que $A(2; -1)$ et que $\overrightarrow{AB}(3; 5)$. Déterminer les coordonnées de B .

b)

On sait que $\overrightarrow{CD}(-2; 4)$ et que $D(1; 3)$. Déterminer les coordonnées de C .

Exo 4

Trouver une coordonnée imposée par une norme. On donne $A(1; 2)$ et $B(4; y)$, où y est un réel.

a)

Exprimer $\|\overrightarrow{AB}\|^2$ en fonction de y .

b)

Déterminer les valeurs de y pour lesquelles $\|\overrightarrow{AB}\| = 5$.

Exo 5

Nature d'un triangle par les longueurs des côtés. Dans un repère orthonormé, on considère $A(1; 1)$, $B(5; 3)$ et $C(3; 5)$.

a)

Calculer les longueurs AB , BC et AC (formes exactes).

b)

Le triangle ABC est-il isocèle ? Justifier.

Exo 6

Fabriquer un vecteur de norme imposée. On donne $\vec{u}(4; 3)$.

a)

Vérifier que $\|\vec{u}\| = 5$, puis donner les composantes du vecteur unitaire $\vec{u}_0$ (norme 1) de même sens que $\vec{u}$.

b)

Donner les composantes d'un vecteur $\vec{v}$ de même sens que $\vec{u}$ et de norme 15.

c)

Donner les composantes d'un vecteur $\vec{w}$ de sens contraire à $\vec{u}$ et de norme 10.

Exo 7

Périmètre d'un triangle. Dans un repère orthonormé, on considère $A(1; 1)$, $B(4; 5)$ et $C(8; 2)$.

a)

Calculer les longueurs AB , BC et CA (formes exactes).

b)

En déduire le périmètre du triangle ABC .

Exo 8

Quatrième sommet d'un parallélogramme. On donne $A(1; 2)$, $B(5; 3)$ et $C(6; 7)$.

a)

Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme (on utilisera $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$).

b)

Calculer les longueurs des diagonales AC et BD .

Exo 9

Position par rapport à un cercle. Le cercle $\mathcal{C}$ a pour centre l'origine O et pour rayon 5. Pour chacun des points suivants, calculer sa distance à O et préciser s'il est *sur le cercle*, à l'*intérieur* ou à l'*extérieur*.

a)

$P(3; 4)$

b)

$Q(5; 0)$

c)

$R(2; 4)$

d)

$S(4; -4)$

e)

$T(-3; -4)$

Exo 10

Inconnue par une égalité de normes. On donne $\vec{u}(m; 3)$ et $\vec{v}(4; -1)$, où m est un réel.

a)

Exprimer $\|\vec{u}\|^2$ et $\|\vec{v}\|^2$.

b)

Déterminer les valeurs de m pour lesquelles $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.

Exo 11

Somme et différence avec des composantes irrationnelles. On donne $\vec{u} (2; \sqrt{5})$ et $\vec{v} (-4; 0)$.

a)

Donner les composantes de $\vec{u} + \vec{v}$ et calculer $\|\vec{u} + \vec{v}\|$.

b)

Donner les composantes de $\vec{u} - \vec{v}$ et calculer $\|\vec{u} - \vec{v}\|$.

Exo 12

Nature d'un quadrilatère. Dans un repère orthonormé, on donne $A (4; 0)$, $B (0; 3)$, $C (-4; 0)$ et $D (0; -3)$.

a)

Calculer les longueurs des quatre côtés AB , BC , CD et DA . Qu'en déduit-on sur la nature de $ABCD$?

b)

Calculer les longueurs des diagonales AC et BD . Le quadrilatère est-il un carré ? Justifier.

Exo 13

Normes à composantes irrationnelles. Calculer la norme (forme exacte) de chacun des vecteurs suivants.

a)

$\vec{u} (\sqrt{5}; 2)$

b)

$\vec{v} (\sqrt{21}; 2)$

c)

$\vec{w} (\sqrt{2}; \sqrt{2})$

Exo 14

Trouver une position à distance donnée. Un randonneur est au point $A (2; 3)$ (coordonnées en km). Un refuge B a pour ordonnée $y_B = 8$ et se trouve à 13 km de A .

a)

En notant x_B l'abscisse du refuge, exprimer $\|\vec{AB}\|^2$ en fonction de x_B .

b)

Résoudre l'équation $\|\vec{AB}\| = 13$.

c)

Sachant que le refuge est à l'est de A (c'est-à-dire $x_B > 2$), donner les coordonnées de B .

Exo 15

Vrai ou faux ? Justifier. Pour chaque affirmation, répondre par *vrai* ou *faux* et justifier (par une preuve courte, ou un contre-exemple si l'affirmation est fausse).

a)

Deux vecteurs de même norme sont nécessairement égaux.

b)

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

c)

Si $\|\vec{u}\| = 0$, alors $\vec{u} = \vec{0}$.

DIFFICILE

14 exercices

Exo 1

Mise en situation — le drone de secours. Un drone décolle de la base $O(0; 0)$ (coordonnées en kilomètres). Il rejoint successivement les points de passage $P_1(3; 4)$, $P_2(3; 9)$ puis $P_3(-1; 12)$.

a)

Calculer les composantes des trois trajets $\vec{OP_1}$, $\vec{P_1P_2}$, $\vec{P_2P_3}$, et vérifier que chaque trajet mesure exactement 5 km.

b)

Déterminer les composantes du déplacement *net* $\vec{OP_3}$ (de la base au point final), puis sa norme (forme exacte, puis valeur approchée au dixième).

c)

Comparer la *distance totale parcourue* par le drone avec la *distance à vol d'oiseau* entre le départ et l'arrivée. Commenter.

Exo 2

Point équidistant sur un axe. Dans un repère orthonormé, on donne $A(1; 2)$ et $B(6; 3)$. On cherche un point M situé sur l'axe des abscisses, donc de la forme $M(x; 0)$, qui soit à égale distance de A et de B .

a)

Exprimer MA^2 et MB^2 en fonction de x .

b)

Traduire la condition $MA = MB$ et en déduire la valeur de x .

c)

Donner les coordonnées de M et la distance commune MA (forme exacte).

Exo 3

Normes avec radicaux. Calculer la norme (forme exacte simplifiée) de chacun des vecteurs suivants.

a)

$$\vec{u} (\sqrt{3} - 1; \sqrt{3} + 1).$$

b)

$$\vec{v} (1 + \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}).$$

Exo 4

Vecteur dépendant d'un paramètre. On donne $A (1; 2)$ et $B (t; t + 3)$, où t est un réel.

a)

Exprimer les composantes de $\overrightarrow{AB}$ en fonction de t .

b)

$$\text{Montrer que } \left\| \overrightarrow{AB} \right\|^2 = 2t^2 + 2.$$

c)

Pour quelle valeur de t la longueur AB est-elle *minimale*? Que vaut alors AB ?

d)

Déterminer les valeurs de t pour lesquelles $AB = \sqrt{10}$.

Exo 5

Triangle, puis parallélogramme. Dans un repère orthonormé, on considère $A (0; 0)$, $B (6; 3)$ et $C (3; 6)$.

a)

Calculer les longueurs AB , BC et CA (formes exactes) et préciser la nature du triangle ABC .

b)

Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

c)

Calculer les longueurs des diagonales AC et BD de ce parallélogramme.

Exo 6

Reconnaître un carré. On considère $A(1; 1)$, $B(4; 2)$, $C(3; 5)$ et $D(0; 4)$.

a)

Calculer les longueurs des quatre côtés AB , BC , CD et DA . Que peut-on déjà conclure ?

b)

Calculer les longueurs des diagonales AC et BD .

c)

En comparant côtés et diagonales, démontrer que $ABCD$ est un carré.

Exo 7

Point mobile sur une droite. Un point M se déplace sur la droite d'équation $y = 2x$: ses coordonnées sont de la forme $M(t; 2t)$, où t est un nombre réel. On fixe $A(4; 3)$.

a)

Exprimer les composantes de $\overrightarrow{AM}$, puis $\|\overrightarrow{AM}\|^2$ en fonction de t .

b)

Pour quelle valeur de t la distance AM est-elle minimale ? Donner cette distance minimale et les coordonnées du point M correspondant.

c)

Déterminer les valeurs de t pour lesquelles $AM = 5$.

Exo 8

Ensemble des points équidistants de deux points. On donne $A(1; 2)$ et $B(5; 4)$. On cherche l'ensemble des points $M(x; y)$ équidistants de A et de B .

a)

Exprimer MA^2 et MB^2 en fonction de x et y .

b)

Écrire la condition $MA = MB$ et montrer qu'elle équivaut à $2x + y - 9 = 0$. Quelle est la nature de cet ensemble ?

c)

Déterminer le point où cet ensemble coupe l'axe des abscisses.

Exo 9

Norme et cercle. Dans un repère orthonormé, on pose $A(2; -1)$ et on note $\mathcal{C}$ l'ensemble des points M tels que $AM = 5$.

a)

Montrer que $M(x; y)$ appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$.

b)

Pour chacun des points $P(6; 2)$, $Q(2; 3)$ et $R(7; 3)$, préciser s'il est sur $\mathcal{C}$, à l'intérieur ou à l'extérieur.

c)

Déterminer les points de $\mathcal{C}$ dont l'abscisse vaut -1 .

Exo 10

Composition de déplacements. Un voilier effectue trois déplacements successifs, donnés (en km) par les vecteurs $\vec{d}_1(6; 2)$, $\vec{d}_2(-1; 5)$ et $\vec{d}_3(3; -4)$.

a)

Déterminer les composantes du déplacement net $\vec{d} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2 + \vec{d}_3$, puis sa norme (forme exacte).

b)

Calculer la distance totale parcourue $\|\vec{d}_1\| + \|\vec{d}_2\| + \|\vec{d}_3\|$ (forme exacte).

c)

Comparer la distance totale parcourue et la norme du déplacement net. Commenter.

d)

Donner les composantes du vecteur qui ramènerait le voilier à son point de départ.

Exo 11

Norme dépendant d'un paramètre. On donne $A(1; -1)$ et $B(t; t + 2)$, où t est un nombre réel.

a)

Exprimer les composantes de $\overrightarrow{AB}$, puis montrer que $\|\overrightarrow{AB}\|^2 = 2(t + 1)^2 + 8$.

b)

En déduire la valeur de t pour laquelle AB est minimale, ainsi que cette distance minimale.

c)

Discuter, selon la valeur du réel c , le nombre de solutions de l'équation $AB = c$. Traiter en particulier les cas $c = 2$, $c = 2\sqrt{2}$ et $c = 4$ (donner alors les valeurs de t).

Exo 12

Norme et radical imbriqué. On veut la norme exacte du vecteur $\vec{u} (1 - \sqrt{3}; \sqrt{3} - 1)$.

a)

Montrer que $\|\vec{u}\|^2 = 8 - 4\sqrt{3}$.

b)

Développer $(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$ et vérifier qu'on retrouve $8 - 4\sqrt{3}$.

c)

En déduire $\|\vec{u}\|$ sous forme simplifiée, puis en donner une valeur approchée au centième.

Exo 13

Longueurs et alignement.

a)

On considère $A (1; 1)$, $B (4; 5)$ et $C (7; 9)$. Calculer AB , BC et AC . Vérifier que $AB + BC = AC$ et en déduire que A, B, C sont alignés.

b)

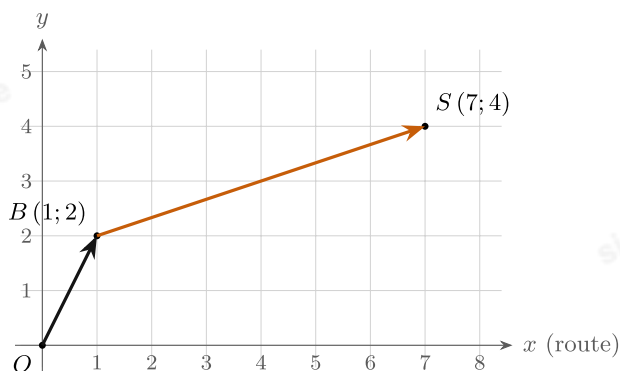
On considère maintenant $A (1; 1)$, $B (4; 5)$ et $D (6; 2)$. Montrer que $AB + BD > AD$. Que peut-on dire de A, B, D ?

c)

À partir de ces deux exemples, énoncer la règle générale reliant AC à $AB + BC$ (inégalité triangulaire) et préciser le cas d'égalité.

Exo 14

Mise en situation — le drone de secours. Un drone évolue au-dessus d'une zone quadrillée (coordonnées en km). Sa base est en $O (0; 0)$, une balise en $B (1; 2)$ et le site à secourir en $S (7; 4)$. Une route rectiligne suit l'axe des abscisses (voir figure).



a)

Donner les composantes et les normes de $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OS}$.

b)

Le drone va de B à S : donner les composantes et la longueur de $\overrightarrow{BS}$.

c)

Une station de recharge $R(x; 0)$ est installée sur la route, à égale distance de B et de S . Déterminer x , puis la distance commune RB .

d)

Comparer le trajet direct $O \rightarrow S$ et le trajet $O \rightarrow R \rightarrow S$. Lequel est le plus court ?



DEUXIÈME PARTIE

Corrigés

Chaque exercice repris pas à pas, niveau par niveau.
Compare ta démarche, pas seulement ton résultat.





Une seconde – avant d'ouvrir le corrigé...



Si ce carnet t'aide, rends-nous la pareille : parle de simulationconcours.be à quelqu'un qui prépare le concours. C'est comme ça qu'on peut continuer.

Ce qu'on a préparé pour toi

- ✓ Ce carnet en interactif, avec correction en un clic
- ✓ Les cours complets, chapitre par chapitre – gratuits
- ✓ 3100 QCM type concours, corrigés et expliqués
- ✓ Des fiches de révision à imprimer

Tous les jeudis : simulation du concours en ligne

En conditions réelles – chrono, QCM type concours et score immédiat.



Rejoins-nous sur simulationconcours.be

scanne le QR ou tape l'adresse – puis reviens vérifier tes réponses

Les corrigés

FACILE 15 exercices

Exo 1

a)

$$\overrightarrow{AB} (4 - 1; 6 - 2) = (3; 4).$$

b)

$$\overrightarrow{CD} (5 - 0; 3 - 3) = (5; 0). \text{ (Vecteur horizontal.)}$$

c)

$$\overrightarrow{EF} (2 - 2; 1 - 7) = (0; -6). \text{ (Vecteur vertical, dirigé vers le bas.)}$$

d)

$$\overrightarrow{GH} (0 - 3; 0 - 5) = (-3; -5).$$

► On applique partout « extrémité moins origine ».

Exo 2

a)

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

b)

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10.$$

c)

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{5^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5.$$

d)

$$\|\vec{t}\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \text{ (forme exacte ; } \approx 3,61).$$

► Les triplets (3; 4; 5) et (6; 8; 10) donnent des normes entières : ce sont des cas à reconnaître.

Exo 3

a)

$$\overrightarrow{AB} (4 - 1; 5 - 1) = (3; 4).$$

b)

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Exo 4

On lit sur la figure : $\vec{a}$ part de $(1; 1)$ et arrive en $(4; 1)$, donc $\vec{a} (3; 0)$ et $\|\vec{a}\| = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3$.

$\vec{b}$ part de $(1; 1)$ et arrive en $(1; 4)$, donc $\vec{b} (0; 3)$ et $\|\vec{b}\| = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$.

► Un vecteur horizontal a sa seconde composante nulle ; un vecteur vertical a sa première composante nulle.

Exo 5

a)

$\overrightarrow{AB} (7 - 2; 1 - 5) = (5; -4)$ et $\overrightarrow{BA} (2 - 7; 5 - 1) = (-5; 4)$.

b)

Les composantes sont *opposées* : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$. Les deux vecteurs ont la même longueur : $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{5^2 + (-4)^2} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$. Échanger origine et extrémité ne change pas la norme, seulement le sens.

Exo 6

a)

$\overrightarrow{AB} (3; 4)$, donc $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

b)

$\overrightarrow{AB} (6; 8)$, donc $AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$.

c)

$\overrightarrow{AB} (5; 12)$, donc $AB = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$.

d)

$\overrightarrow{AB} (8; 15)$, donc $AB = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{289} = 17$.

► La distance AB est exactement la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Exo 7

a)

$\overrightarrow{AB} (5; 0)$: vecteur **horizontal** (seconde composante nulle).

b)

$\overrightarrow{AB} (0; 7)$: vecteur **vertical** (première composante nulle).

c)

$\overrightarrow{AB} (0; 0)$: **vecteur nul** (les deux points sont confondus).

d)

$\overrightarrow{AB}(3; 4)$: vecteur **oblique** (aucune composante nulle).

Exo 8

a)

$\overrightarrow{AB}(3; 4)$ et $\overrightarrow{CD}(3; 4)$: mêmes composantes, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (vecteurs égaux).

b)

$\overrightarrow{EF}(3; 1)$ et $\overrightarrow{GH}(3; -1)$: la seconde composante diffère, donc $\overrightarrow{EF} \neq \overrightarrow{GH}$.

► Deux vecteurs peuvent partir de points différents et être pourtant égaux : seule compte l'égalité des composantes.

Exo 9

a)

$2\vec{u}(6; 8)$, $3\vec{u}(9; 12)$, $-\vec{u}(-3; -4)$.

b)

$\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, donc $\|2\vec{u}\| = 2 \times 5 = 10$ et $\|3\vec{u}\| = 3 \times 5 = 15$.

► On utilise $\|k\vec{u}\| = |k| \cdot \|\vec{u}\|$: multiplier un vecteur par k multiplie sa longueur par $|k|$.

Exo 10

a)

$\vec{u} + \vec{v}(2 + 1; 1 + 3) = (3; 4)$.

b)

$\vec{u} - \vec{v}(2 - 1; 1 - 3) = (1; -2)$.

c)

$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$.

► On additionne (ou soustrait) *composante par composante*.

Exo 11

a)

3 vers la droite $\rightarrow$ première composante 3 ; 4 vers le haut $\rightarrow$ seconde composante 4. Donc $\overrightarrow{AB}(3; 4)$.

b)

$B = A + \overrightarrow{AB} : x_B = 3 + 3 = 6, y_B = 2 + 4 = 6$. Donc $B(6; 6)$.

c)

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Exo 12

$\vec{a}$ part de (1; 1) et arrive en (4; 5), donc $\vec{a}$ (3; 4) et $\|\vec{a}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

$\vec{b}$ part de (5; 0) et arrive en (1; 3), donc $\vec{b}$ (-4; 3) et $\|\vec{b}\| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$.

► On lit toujours « extrémité moins origine », même quand le vecteur est oblique.

Exo 13

a)

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

b)

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

c)

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}.$$

d)

$$\|\vec{t}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

► Aucun de ces nombres n'est un carré parfait : on laisse le radical tel quel.

Exo 14

a)

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{6^2 + 0^2} = 6, \|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \|\vec{w}\| = \sqrt{0^2 + 7^2} = 7.$$

b)

Du plus court au plus long : $\vec{v}$ (5) < $\vec{u}$ (6) < $\vec{w}$ (7).

Exo 15

a)

$$AB = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3 \text{ et } BC = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4 ; \text{ distance totale } AB + BC = 3 + 4 = 7.$$

b)

$$\overrightarrow{AC} (3; 4), \text{ donc } AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

c)

$7 > 5$: le chemin parcouru (7) est plus long que la distance directe (5). Le trajet en deux étapes fait un détour.

MOYEN 15 exercices

Exo 1

a)

$$\overrightarrow{AB}(1 - (-2); -1 - 3) = (3; -4), \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

b)

$$\overrightarrow{AB}(-1 - 4; -2 - (-2)) = (-5; 0), \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = 5.$$

c)

$$\overrightarrow{AB}(-3 - (-3); 5 - (-1)) = (0; 6), \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{0^2 + 6^2} = 6.$$

► Bien soustraire les négatifs : $-1 - (-2) = +3$. Et $(-4)^2 = +16$.

Exo 2

a)

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}.$$

b)

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = 3\sqrt{5}.$$

c)

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4.$$

► Pour simplifier $\sqrt{20}$, on repère le plus grand carré parfait facteur : $20 = 4 \times 5$, donc $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Et $(2\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12$.

Exo 3

a)

$B = A + \overrightarrow{AB}$ composante par composante : $x_B = 2 + 3 = 5$, $y_B = -1 + 5 = 4$. Donc $B(5; 4)$.

b)

Comme $\overrightarrow{CD} = (x_D - x_C; y_D - y_C)$, on a $x_C = x_D - (x_D - x_C) = 1 - (-2) = 3$ et $y_C = 3 - 4 = -1$. Donc $C(3; -1)$.

► Retenir : « extrémité = origine + vecteur », donc « origine = extrémité - vecteur ».

Exo 4

a)

$$\overrightarrow{AB}(4 - 1; y - 2) = (3; y - 2), \text{ donc } \|\overrightarrow{AB}\|^2 = 3^2 + (y - 2)^2 = 9 + (y - 2)^2.$$

b)

$$\|\vec{AB}\| = 5 \iff \|\vec{AB}\|^2 = 25 \iff 9 + (y - 2)^2 = 25 \iff (y - 2)^2 = 16. \text{ D'où } y - 2 = \pm 4, \text{ soit } y = 6 \text{ ou } y = -2.$$

► Une norme imposée donne une équation du *second degré* : il y a en général **deux** solutions (deux positions symétriques pour B).

Exo 5

a)

$$\vec{AB}(4; 2) \text{ donc } AB = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

$$\vec{BC}(-2; 2) \text{ donc } BC = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

$$\vec{AC}(2; 4) \text{ donc } AC = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

b)

$AB = AC = 2\sqrt{5}$: le triangle ABC est **isocèle** en A .

► Pour la nature d'un triangle, on compare les longueurs des côtés, calculées comme des normes de vecteurs.

Exo 6

a)

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5. \text{ Le vecteur unitaire est } \vec{u}_0 = \frac{1}{5}\vec{u}, \text{ donc } \vec{u}_0\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right).$$

b)

De norme $15 = 3 \times 5$ et de même sens : $\vec{v} = 3\vec{u} = (12; 9)$.

c)

De norme $10 = 2 \times 5$ et de sens contraire : $\vec{w} = -2\vec{u} = (-8; -6)$.

► On règle la longueur avec le facteur $k = \frac{\text{norme voulue}}{\|\vec{u}\|}$, et le sens avec le signe de k .

Exo 7

a)

$$\vec{AB}(3; 4) \text{ donc } AB = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

$$\vec{BC}(4; -3) \text{ donc } BC = \sqrt{16 + 9} = 5.$$

$$\vec{CA}(-7; -1) \text{ donc } CA = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

b)

$$\text{Périmètre} = AB + BC + CA = 5 + 5 + 5\sqrt{2} = 10 + 5\sqrt{2}.$$

► Le périmètre est la somme des trois longueurs de côtés, chacune calculée comme une norme.

Exo 8

a)

$\overrightarrow{AB}(4; 1)$. On veut $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire $C - D = (4; 1)$, donc $D = C - (4; 1) = (6 - 4; 7 - 1) = (2; 6)$.

b)

$\overrightarrow{AC}(5; 5)$ donc $AC = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

$\overrightarrow{BD}(-3; 3)$ donc $BD = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

► Dans le parallélogramme $ABCD$, les côtés opposés $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux : c'est ce qui donne le point D .

Exo 9

a)

$OP = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$: P est **sur** le cercle.

b)

$OQ = \sqrt{5^2 + 0^2} = 5$: Q est **sur** le cercle.

c)

$OR = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4,47 < 5$: R est à l'**intérieur**.

d)

$OS = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \approx 5,66 > 5$: S est à l'**extérieur**.

e)

$OT = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$: T est **sur** le cercle.

► Un point est sur le cercle si $OM = r$, à l'intérieur si $OM < r$, à l'extérieur si $OM > r$.

Exo 10

a)

$\|\vec{u}\|^2 = m^2 + 3^2 = m^2 + 9$ et $\|\vec{v}\|^2 = 4^2 + (-1)^2 = 17$.

b)

$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \iff m^2 + 9 = 17 \iff m^2 = 8 \iff m = \pm 2\sqrt{2}$.

► On élève au carré pour supprimer les racines : l'égalité des normes devient une équation en m^2 .

Exo 11

a)

$$\vec{u} + \vec{v} (2 + (-4); \sqrt{5} + 0) = (-2; \sqrt{5}), \text{ donc } \|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{(-2)^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{4 + 5} = \sqrt{9} = 3.$$

b)

$$\vec{u} - \vec{v} (2 - (-4); \sqrt{5} - 0) = (6; \sqrt{5}), \text{ donc } \|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{6^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{36 + 5} = \sqrt{41}.$$

► Rappel : $(\sqrt{5})^2 = 5$. Un radical au carré « disparaît ».

Exo 12

a)

$$\overrightarrow{AB}(-4; 3) \Rightarrow AB = 5; \overrightarrow{BC}(-4; -3) \Rightarrow BC = 5; \overrightarrow{CD}(4; -3) \Rightarrow CD = 5; \overrightarrow{DA}(4; 3) \Rightarrow DA = 5.$$

Les quatre côtés sont égaux : $ABCD$ est un **losange**.

b)

$$\overrightarrow{AC}(-8; 0) \Rightarrow AC = 8 \text{ et } \overrightarrow{BD}(0; -6) \Rightarrow BD = 6. \text{ Les diagonales sont différentes } (8 \neq 6), \text{ or un carré a ses diagonales égales : } ABCD \text{ n'est pas un carré.}$$

► Quatre côtés égaux $\Rightarrow$ losange ; il faut en plus des diagonales égales pour un carré.

Exo 13

a)

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2^2} = \sqrt{5 + 4} = \sqrt{9} = 3.$$

b)

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(\sqrt{21})^2 + 2^2} = \sqrt{21 + 4} = \sqrt{25} = 5.$$

c)

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2.$$

► Même avec des composantes irrationnelles, la norme peut être un entier : les carrés font disparaître les radicaux.

Exo 14

a)

$$\overrightarrow{AB}(x_B - 2; 8 - 3) = (x_B - 2; 5), \text{ donc } \|\overrightarrow{AB}\|^2 = (x_B - 2)^2 + 25.$$

b)

$$\|\vec{AB}\| = 13 \iff (x_B - 2)^2 + 25 = 169 \iff (x_B - 2)^2 = 144 \iff x_B - 2 = \pm 12, \text{ soit } x_B = 14 \text{ ou } x_B = -10.$$

c)

Le refuge est à l'est ($x_B > 2$), on garde $x_B = 14$: donc $B(14; 8)$.

► Une distance imposée donne une équation du second degré (deux positions possibles) ; le contexte (« à l'est ») permet de choisir la bonne.

Exo 15

a)

Faux. Contre-exemple : $\vec{u}(3; 4)$ et $\vec{v}(5; 0)$ ont la même norme ($\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 5$) mais des composantes différentes, donc $\vec{u} \neq \vec{v}$.

b)

Faux en général. Contre-exemple : $\vec{u}(3; 0)$ et $\vec{v}(0; 4)$ donnent $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|(3; 4)\| = 5$, alors que $\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| = 3 + 4 = 7$. (L'égalité n'a lieu que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même sens.)

c)

Vrai. $\|\vec{u}\| = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0$, donc $\vec{u} = \vec{0}$.

DIFFICILE

14 exercices

Exo 1

a)

$\vec{OP_1}(3; 4)$, longueur $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

$\vec{P_1P_2}(3 - 3; 9 - 4) = (0; 5)$, longueur $\sqrt{0 + 25} = 5$.

$\vec{P_2P_3}(-1 - 3; 12 - 9) = (-4; 3)$, longueur $\sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$.

Les trois trajets mesurent bien 5 km chacun.

b)

Déplacement net : $\vec{OP_3}(-1 - 0; 12 - 0) = (-1; 12)$, donc

$$\|\vec{OP_3}\| = \sqrt{(-1)^2 + 12^2} = \sqrt{1 + 144} = \sqrt{145} \approx 12,0 \text{ km.}$$

c)

Distance *parcourue* = $5 + 5 + 5 = 15$ km. Distance à *vol d'oiseau* = $\sqrt{145} \approx 12,0$ km. Le drone parcourt plus de chemin que la distance directe (les trajets ne sont pas alignés) : c'est logique, un déplacement net est toujours $\leq$ à la longueur du chemin suivi.

► Le déplacement net se lit directement sur les positions initiale et finale (« extrémité moins origine »), sans repasser par les étapes.

Exo 2

a)

$$\overrightarrow{MA}(1-x; 2) \text{ donc } MA^2 = (1-x)^2 + 2^2 = (x-1)^2 + 4.$$

$$\overrightarrow{MB}(6-x; 3) \text{ donc } MB^2 = (6-x)^2 + 3^2 = (x-6)^2 + 9.$$

b)

$$MA = MB \iff MA^2 = MB^2 :$$

$$(x-1)^2 + 4 = (x-6)^2 + 9.$$

On développe : $x^2 - 2x + 1 + 4 = x^2 - 12x + 36 + 9$, soit $-2x + 5 = -12x + 45$, d'où $10x = 40$ et $x = 4$.

c)

$$M(4; 0). \text{ Distance commune : } MA = \sqrt{(4-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \text{ (on vérifie } MB = \sqrt{(4-6)^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}).$$

► Astuce : élever au carré fait disparaître les racines et les termes x^2 se simplifient, laissant une équation du premier degré.

Exo 3

a)

$$\|\vec{u}\|^2 = (\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{3}+1)^2 = (4-2\sqrt{3}) + (4+2\sqrt{3}) = 8, \text{ donc } \|\vec{u}\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

b)

$$\|\vec{v}\|^2 = (1+\sqrt{2})^2 + (1-\sqrt{2})^2 = (3+2\sqrt{2}) + (3-2\sqrt{2}) = 6, \text{ donc } \|\vec{v}\| = \sqrt{6}.$$

► Les doubles produits $\pm 2\sqrt{3}$ (ou $\pm 2\sqrt{2}$) se **compensent** quand on additionne les carrés de deux quantités conjuguées : le résultat est un entier.

Exo 4

a)

$$\overrightarrow{AB}(t-1; (t+3)-2) = (t-1; t+1).$$

b)

$$\|\vec{AB}\|^2 = (t-1)^2 + (t+1)^2 = (t^2 - 2t + 1) + (t^2 + 2t + 1) = 2t^2 + 2.$$

c)

$2t^2 + 2$ est minimal quand t^2 est minimal, c'est-à-dire pour $t = 0$. Alors $\|\vec{AB}\|^2 = 2$ et $AB = \sqrt{2}$.

d)

$$AB = \sqrt{10} \iff 2t^2 + 2 = 10 \iff t^2 = 4 \iff t = 2 \text{ ou } t = -2.$$

► Travailler avec $\|\vec{AB}\|^2$ évite les racines : c'est une fonction du second degré en t , minimale au sommet ($t = 0$ ici).

Exo 5

a)

$\vec{AB}(6;3) \Rightarrow AB = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$; $\vec{BC}(-3;3) \Rightarrow BC = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$;
 $\vec{CA}(-3;-6) \Rightarrow CA = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$. Comme $AB = CA = 3\sqrt{5}$, le triangle est **isocèle en A**.

b)

$ABCD$ parallélogramme $\iff \vec{AB} = \vec{DC} \iff D = A - B + C = (0 - 6 + 3; 0 - 3 + 6) = (-3; 3)$.

c)

$\vec{AC}(3;6) \Rightarrow AC = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$; $\vec{BD}(-9;0) \Rightarrow BD = 9$.

► Le quatrième sommet vient de l'égalité $\vec{AB} = \vec{DC}$; les diagonales se calculent ensuite comme de simples normes.

Exo 6

a)

$\vec{AB}(3;1), \vec{BC}(-1;3), \vec{CD}(-3;-1), \vec{DA}(1;-3)$: chacun a pour norme $\sqrt{9+1} = \sqrt{10}$. Les quatre côtés sont égaux : $ABCD$ est (au moins) un **losange**.

b)

$\vec{AC}(2;4) \Rightarrow AC = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$; $\vec{BD}(-4;2) \Rightarrow BD = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Les diagonales sont égales.

c)

Quatre côtés égaux $\Rightarrow$ losange ; diagonales égales $\Rightarrow$ rectangle ; les deux conditions ensemble $\Rightarrow$ **carré**.
 (On vérifie aussi $(\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2 = 20 = (2\sqrt{5})^2$: l'angle en chaque sommet est droit.)

Exo 7

a)

$\overrightarrow{AM}(t-4; 2t-3)$, donc $\|\overrightarrow{AM}\|^2 = (t-4)^2 + (2t-3)^2 = (t^2 - 8t + 16) + (4t^2 - 12t + 9) = 5t^2 - 20t + 25$.

b)

$\|\overrightarrow{AM}\|^2 = 5(t^2 - 4t + 5) = 5((t-2)^2 + 1) = 5(t-2)^2 + 5$, minimal pour $t = 2$. Alors $\|\overrightarrow{AM}\|^2 = 5$, soit $AM = \sqrt{5}$, et $M(2; 4)$.

c)

$AM = 5 \iff 5t^2 - 20t + 25 = 25 \iff 5t^2 - 20t = 0 \iff 5t(t-4) = 0$, d'où $t = 0$ ou $t = 4$ (soit $M(0; 0)$ ou $M(4; 8)$).

► Travailler avec $\|\overrightarrow{AM}\|^2$ (fonction du second degré en t) évite les racines : le minimum est au sommet de la parabole.

Exo 8

a)

$MA^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2$ et $MB^2 = (x-5)^2 + (y-4)^2$.

b)

$MA = MB \iff MA^2 = MB^2$:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-5)^2 + (y-4)^2.$$

En développant, les termes x^2 et y^2 se simplifient : $-2x + 1 - 4y + 4 = -10x + 25 - 8y + 16$, soit $8x + 4y - 36 = 0$, c'est-à-dire $2x + y - 9 = 0$. C'est une **droite** : la médiatrice du segment $[AB]$.

c)

Sur l'axe des abscisses, $y = 0$: $2x - 9 = 0$, donc $x = \frac{9}{2}$. Le point cherché est $(\frac{9}{2}; 0)$.

► L'ensemble des points équidistants de A et B est toujours la médiatrice de $[AB]$.

Exo 9

a)

$AM = 5 \iff AM^2 = 25 \iff (x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$. C'est l'équation du cercle de centre A et de rayon 5.

b)

$$P: (6-2)^2 + (2+1)^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow \text{sur } \mathcal{C}.$$

$$Q: (2-2)^2 + (3+1)^2 = 0 + 16 = 16 < 25 \Rightarrow \text{intérieur}.$$

$$R: (7-2)^2 + (3+1)^2 = 25 + 16 = 41 > 25 \Rightarrow \text{extérieur}.$$

c)

$$x = -1: (-1-2)^2 + (y+1)^2 = 25 \iff 9 + (y+1)^2 = 25 \iff (y+1)^2 = 16 \iff y+1 = \pm 4, \text{ donc } y = 3 \text{ ou } y = -5. \text{ Les points sont } (-1; 3) \text{ et } (-1; -5).$$

Exo 10

a)

$$\vec{d}(6-1+3; 2+5-4) = (8; 3), \text{ donc } \|\vec{d}\| = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73}.$$

b)

$$\|\vec{d}_1\| = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}; \|\vec{d}_2\| = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}; \|\vec{d}_3\| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5. \text{ Distance totale} = 2\sqrt{10} + \sqrt{26} + 5.$$

c)

$$\|\vec{d}\| = \sqrt{73} \approx 8,5 \text{ km, tandis que la distance parcourue } \approx 6,32 + 5,10 + 5 = 16,4 \text{ km. Le déplacement net est bien plus court : sa norme est toujours } \leq \text{ à la distance parcourue (égalité seulement si les déplacements sont colinéaires et de même sens).}$$

d)

$$\text{Pour revenir au départ, il faut le vecteur opposé au déplacement net : } (-8; -3).$$

Exo 11

a)

$$\overrightarrow{AB}(t-1; t+3), \text{ donc } \|\overrightarrow{AB}\|^2 = (t-1)^2 + (t+3)^2 = 2t^2 + 4t + 10 = 2(t^2 + 2t + 5) = 2(t+1)^2 + 8.$$

b)

$$2(t+1)^2 + 8 \text{ est minimal pour } t = -1; \text{ alors } \|\overrightarrow{AB}\|^2 = 8, \text{ soit } AB = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

c)

$$AB = c \iff 2(t+1)^2 + 8 = c^2 \iff (t+1)^2 = \frac{c^2-8}{2}.$$

- $c = 2 : (t+1)^2 = \frac{4-8}{2} = -2 < 0$: **aucune** solution.
- $c = 2\sqrt{2} : (t+1)^2 = 0$: **une** solution, $t = -1$.
- $c = 4 : (t+1)^2 = \frac{16-8}{2} = 4$, donc $t+1 = \pm 2$: **deux** solutions, $t = 1$ ou $t = -3$.

► La distance minimale $2\sqrt{2}$ est le seuil : en dessous, aucune position ; à ce seuil, une seule ; au-dessus, deux positions symétriques.

Exo 12

a)

Comme $\sqrt{3} - 1 = -(1 - \sqrt{3})$, les deux composantes ont le même carré : $\|\vec{u}\|^2 = (1 - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{3} - 1)^2 = 2(1 - \sqrt{3})^2 = 2(1 - 2\sqrt{3} + 3) = 2(4 - 2\sqrt{3}) = 8 - 4\sqrt{3}$.

b)

$$(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 = 6 - 2\sqrt{12} + 2 = 8 - 2 \cdot 2\sqrt{3} = 8 - 4\sqrt{3}.$$

c)

Donc $\|\vec{u}\| = \sqrt{8 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ (positif car $\sqrt{6} > \sqrt{2}$), soit $\|\vec{u}\| \approx 2,449 - 1,414 \approx 1,04$.

► Un radical du type $\sqrt{a - b\sqrt{c}}$ peut parfois se « dé-nicher » en $\sqrt{m} - \sqrt{n}$: on le devine puis on le vérifie en élevant au carré.

Exo 13

a)

$\overrightarrow{AB}(3;4) \Rightarrow AB = 5$; $\overrightarrow{BC}(3;4) \Rightarrow BC = 5$; $\overrightarrow{AC}(6;8) \Rightarrow AC = 10$. Or $AB + BC = 5 + 5 = 10 = AC$: l'égalité de l'inégalité triangulaire est atteinte, donc A, B, C sont **alignés** (B est le milieu de $[AC]$).

b)

$\overrightarrow{AB}(3;4) \Rightarrow AB = 5$; $\overrightarrow{BD}(2;-3) \Rightarrow BD = \sqrt{13}$; $\overrightarrow{AD}(5;1) \Rightarrow AD = \sqrt{26}$. On a $AB + BD = 5 + \sqrt{13} \approx 8,61 > \sqrt{26} \approx 5,10$: l'inégalité est *stricte*, donc A, B, D forment un vrai **triangle** (non alignés).

c)

Règle générale : $AC \leq AB + BC$ (**inégalité triangulaire**), avec **égalité si et seulement si** B appartient au segment $[AC]$ (les trois points alignés, B entre A et C).

Exo 14

a)

$$\overrightarrow{OB}(1;2) \Rightarrow \|\overrightarrow{OB}\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} ; \overrightarrow{OS}(7;4) \Rightarrow \|\overrightarrow{OS}\| = \sqrt{49+16} = \sqrt{65}.$$

b)

$$\overrightarrow{BS}(6; 2) \Rightarrow \|\overrightarrow{BS}\| = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

c)

$RB^2 = (x - 1)^2 + 2^2$ et $RS^2 = (x - 7)^2 + 4^2$. La condition $RB = RS$ donne $(x - 1)^2 + 4 = (x - 7)^2 + 16$, soit $-2x + 5 = -14x + 65$, d'où $12x = 60$ et $x = 5$. Donc $R(5; 0)$ et $RB = \sqrt{(5 - 1)^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ (on vérifie $RS = 2\sqrt{5}$ également).

d)

Trajet direct : $OS = \sqrt{65} \approx 8,06$ km. Trajet $O \rightarrow R \rightarrow S$: $OR = 5$ puis $RS = 2\sqrt{5} \approx 4,47$, soit $5 + 2\sqrt{5} \approx 9,47$ km. Le **trajet direct** est plus court.



Tous les exos cochés ? Passe au niveau réel.

+

Ce carnet est un extrait de notre bibliothèque d'entraînement — la suite se joue en ligne.

Sur simulationconcours.be

- ✓ Le même carnet en interactif, avec correction en un clic
- ✓ Les autres mécaniques de la fiche, niveau par niveau
- ✓ 3100 QCM type concours, corrigés et expliqués
- ✓ Les cours complets — gratuits — et les fiches de révision

Tous les jeudis : simulation du concours en ligne

En conditions réelles — chrono, QCM type concours et score immédiat.



Rejoins-nous sur simulationconcours.be

scanne le QR ou tape l'adresse — les cours complets sont gratuits