



simulationconcours.be



Mathématiques

Carnet d'entraînement



Fonctions composees

Dérivation · Mécanique 3 — des exercices calibrés concours, du plus simple au plus retors.

44 exercices

3 niveaux

corrigés détaillés

Comment bosser ce carnet

- ✓ Lis d'abord le tutoriel : la mécanique y est expliquée pas à pas
- ✓ Fais chaque niveau en entier **avant** d'ouvrir les corrigés
- ✓ Note à côté de chaque exo : réussi, hésité ou raté — et rejoue les ratés 48 h plus tard



simulationconcours.be

scanne & continue en ligne

Sommaire

- 1 Le tutoriel — la mécanique expliquée
- 2 Les exercices Facile x15 · Moyen x15 · Difficile x14
- 3 Les corrigés détaillés exercice par exercice

Le tutoriel

Ce document est un **carnet d'exercices** : on t'explique d'abord la mécanique, puis tu la travailles sur 44 exercices classés en trois niveaux. Les corrigés détaillés t'attendent en deuxième partie, après la page « Corrigés » — pas avant de l'avoir mérité.

Une fonction *composée* est une fonction *emboîtée* dans une autre : $\sin(x^2)$, c'est la fonction sinus **appliquée à x^2** . On l'imagine comme un **oignon** : plusieurs **couches** superposées. Pour dériver, on épluche de l'extérieur vers l'intérieur.

À RETENIR le principe des pelures d'oignon

On note U la quantité **intérieure** (ce qui est « emballé »). On dérive la couche **externe** en gardant U intact, **puis** on multiplie par U' , la dérivée de l'intérieur. Mini-formulaire :

$$(U^n)' = nU^{n-1}U' \quad (\sqrt{U})' = \frac{U'}{2\sqrt{U}} \quad (e^U)' = U' e^U \quad (a^U)' = U' a^U \ln a$$

$$(\ln U)' = \frac{U'}{U} \quad (\log_a U)' = \frac{U'}{U \ln a} \quad (\sin U)' = U' \cos U \quad (\cos U)' = -U' \sin U$$

$$(\operatorname{tg} U)' = \frac{U'}{\cos^2 U} \quad (\operatorname{cotg} U)' = -\frac{U'}{\sin^2 U} \quad (\operatorname{arctg} U)' = \frac{U'}{1 + U^2}$$

$$(\arcsin U)' = \frac{U'}{\sqrt{1 - U^2}} \quad (\arccos U)' = -\frac{U'}{\sqrt{1 - U^2}}$$

Dans chaque formule, le facteur U' est **la signature de la composée**.

☞ **MÉTHODE** *dériver une composée en 4 étapes*

- 1 **Repérer les couches** : quelle est la fonction *externe* (celle du dessus) ? Que contient-elle ? On pose U = l'intérieur.
- 2 **Dériver l'externe** avec la formule adaptée, **en gardant U tel quel**.
- 3 **Multiplier par U'** (dérivée de l'intérieur). S'il reste des couches dans U , on recommence les étapes 1–3 sur U .
- 4 **Assembler et simplifier** le produit obtenu.

⚠ **PIÈGE** *on oublie presque toujours le facteur U' !*

C'est l'erreur numéro un. On dérive l'enveloppe mais on oublie de multiplier par la dérivée de l'intérieur.

$$(\sin x^2)' = 2x \cos x^2 \quad \text{et non} \quad \cos x^2; \quad (f^2)' = 2f'f \quad \text{et non} \quad 2f.$$

Réflexe : après avoir dérivé la couche externe, demande-toi toujours « *et l'intérieur, quelle est sa dérivée ?* » — puis multiplie.

💡 **EXEMPLE** $y = \sin(x^2)$

Couche externe : le sinus. Intérieur : $U = x^2$, donc $U' = 2x$.

Formule $(\sin U)' = U' \cos U$:

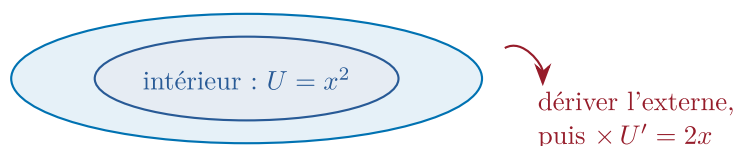
$$y' = \underbrace{2x}_{U'} \cdot \underbrace{\cos(x^2)}_{\cos U} = 2x \cos(x^2).$$

💡 **EXEMPLE** $y = \sqrt{x^2 + 1}$

Couche externe : la racine. Intérieur : $U = x^2 + 1$, donc $U' = 2x$.

Formule $(\sqrt{U})' = \frac{U'}{2\sqrt{U}}$:

$$y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$



Les exercices

FACILE 15 exercices**Exo 1** 1 – puissance d'une fonctionDériver $y = (2x + 1)^5$.**Exo 2** 2 – sinus et cosinus d'une composéeDériver $y = \sin(3x)$, puis $y = \cos(x^2)$.**Exo 3** 3 – exponentielle composéeDériver $y = e^{2x}$, puis $y = e^{-x^2}$.**Exo 4** 4 – logarithme composéDériver $y = \ln(x^2 + 1)$.**Exo 5** 5 – racine composéeDériver $y = \sqrt{x^2 + 1}$.**Exo 6** 6 – puissance d'une fonction affine**a)**Dériver $y = (3x - 4)^7$.**b)**Dériver $y = (1 - x^2)^4$.**Exo 7** 7 – racine carrée composée**a)**Dériver $y = \sqrt{4x + 3}$ (préciser le domaine).**b)**Dériver $y = \sqrt{1 - x}$ (préciser le domaine).**Exo 8** 8 – exponentielle composée**a)**Dériver $y = e^{5x+1}$.**b)**Dériver $y = e^{x^3}$.

Exo 9 9 – logarithme composé

a)

Dériver $y = \ln(3x + 2)$.

b)

Dériver $y = \ln(5x)$ et commenter le résultat.

Exo 10 10 – sinus et cosinus composés

a)

Dériver $y = \sin(4x - 1)$.

b)

Dériver $y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

Exo 11 11 – fonction inverse (puissance -1)

a)

Dériver $y = \frac{1}{2x+1}$ en écrivant $y = (2x + 1)^{-1}$.

b)

Dériver $y = \frac{1}{(x^2+1)^2}$.

Exo 12 12 – exposant fractionnaire

a)

Dériver $y = (x^2 + 1)^{3/2}$.

b)

Dériver $y = (x^3 + 1)^{2/3}$.

Exo 13 13 – décroissance exponentielle (situation)

La concentration d'un médicament (en mg/L) est $C(t) = 5e^{-0,4t}$, où $t \geq 0$ est en heures.

a)

Calculer $C'(t)$.

b)

Déduire du signe de $C'(t)$ le sens de variation de C .

Exo 14 14 – oscillations (situation)

a)

L'élongation d'un ressort est $h(t) = 2 \sin(3t)$. Calculer $h'(t)$.

b)

Calculer la dérivée de $g(t) = 1 + \cos(2t)$.

Exo 15 15 – racine d'un trinôme et domaine

Soit $y = \sqrt{9 - x^2}$.

a)

Déterminer le domaine de définition, puis le domaine de dérivabilité.

b)

Calculer y' .

MOYEN 15 exercices

Exo 1 1 – fonctions réciproques composées

Dériver $y = \arctg(3x)$, puis $y = \arcsin(x^2)$.

Exo 2 2 – base quelconque

Dériver $y = \log_{10}(x)$, puis $y = 2^x$.

Exo 3 3 – tangente et cotangente composées

Dériver $y = \operatorname{tg}(2x)$, puis $y = \operatorname{cotg}(x)$.

Exo 4 4 – produit et exponentielle

Dériver $y = x^2 e^x$.

Exo 5 5 – produit de deux composées

Dériver $y = e^x \sin(x)$.

Exo 6 6 – quotient et chaîne

a)

Dériver $y = \frac{e^{2x}}{x+1}$.

b)

Dériver $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Exo 7 7 – produit et exponentielle composée**a)**Dériver $y = x e^{-x^2}$.**b)**Dériver $y = (2x + 1)e^{3x}$.**Exo 8** 8 – puissance et racine d'un trinôme**a)**Dériver $y = (x^2 - 3x + 1)^4$.**b)**Dériver $y = \sqrt{x^2 + x + 1}$.**Exo 9** 9 – logarithme d'un quotientSoit $y = \ln \frac{x-1}{x+1}$ (pour $x > 1$).**a)**Écrire y comme une différence de deux logarithmes.**b)**En déduire y' et le mettre sur un même dénominateur.**Exo 10** 10 – base quelconque composée**a)**Dériver $y = 3^{x^2}$.**b)**Dériver $y = \log_2(x^2 + 1)$.**Exo 11** 11 – composée de deux fonctions transcendentes**a)**Dériver $y = \sin(\cos x)$.**b)**Dériver $y = \cos(e^x)$.

Exo 12 12 – fonctions réciproques composées

a)

Dériver $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$ (pour $x \neq 0$) ; commenter la forme obtenue.

b)

Dériver $y = \arcsin(2x)$ et préciser le domaine.

Exo 13 13 – carré d'une fonction trigonométrique

a)

Dériver $y = \operatorname{tg}^2 x$.

b)

Montrer que la dérivée de $y = \ln(\cos x)$ est $-\operatorname{tg} x$ (préciser le domaine).

Exo 14 14 – exponentielle d'une fonction non affine

a)

Dériver $y = e^{1/x}$ (pour $x \neq 0$).

b)

Dériver $y = e^{\sqrt{x}}$ (pour $x > 0$).

Exo 15 15 – refroidissement de Newton (situation)

La température d'un café est $T(t) = 20 + 80 e^{-0,1t}$ (pour $t \geq 0$ en minutes, T en degrés Celsius).

a)

Calculer $T'(t)$.

b)

Étudier le signe de $T'(t)$ et interpréter physiquement.

DIFFICILE 14 exercices

Exo 1 1 – trois couches : carré ◦ sinus ◦ racine

Soit $y = \sin^2(\sqrt{x} + 1)$.

a)

Couche externe (le carré) : justifier que $y' = 2 \sin(\sqrt{x} + 1) \cdot (\sin(\sqrt{x} + 1))'$.

b)

Couche sinus : montrer que $(\sin(\sqrt{x} + 1))' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos(\sqrt{x} + 1)$.

c)

Assembler puis, à l'aide de $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$, montrer que $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin(2(\sqrt{x} + 1))$. Préciser le domaine.

Exo 2 2 – racine ◦ logarithme ◦ cosinus

Soit $y = \sqrt{\ln(\cos x + 2)}$.

a)

Réécrire $y = (\ln(\cos x + 2))^{1/2}$ et dériver la couche puissance $\frac{1}{2}$.

b)

Dériver la couche logarithme (poser $U = \cos x + 2$, donner U').

c)

Assembler et montrer que $y' = \frac{-\sin x}{2(\cos x + 2)\sqrt{\ln(\cos x + 2)}}$.

Remarque : $\cos x + 2 \geq 1 > 0$, la racine et le $\ln$ sont bien définis.

Exo 3 3 – fonction inconnue f

Soit f une fonction dérivable.

- 1 Montrer que $(f^2)' = 2f'f$ (par la règle du produit ou la formule $(U^2)'$).
- 2 Montrer que $(3 \ln |f|)' = \frac{3f'}{f}$ (là où $f \neq 0$).
- 3 Application : $f(x) = x^2 + 1$. Calculer $(f^2)'$ et $(3 \ln |f|)'$.

Exo 4 4 – fonction inconnue u et changement de variable

Soit u une fonction dérivable.

- 1 On pose $v(x) = u(3x)$. Montrer que $v'(x) = 3u'(3x)$. Si $u(x) = x^2$, vérifier que $v'(x) = 18x$.
- 2 On pose $v(x) = u(\ln(x + 1))$. Exprimer $v'(x)$.

Exo 5 5 – dérivée logarithmique

Soit $y = \frac{(x+1)^3 \sqrt{2x-1}}{(x^2+1)^2}$, pour $x > \frac{1}{2}$ (donc $y > 0$).

a)

Écrire $\ln y$ comme une somme de logarithmes.

b)

Dériver cette égalité pour obtenir $\frac{y'}{y}$.

c)

En déduire y' .

Exo 6 6 – trois couches : racine ◦ carré ◦ logarithme

Soit $y = \sqrt{1 + (\ln x)^2}$, pour $x > 0$.

a)

Couche externe (racine) : écrire $y = (1 + (\ln x)^2)^{1/2}$ et donner y' en fonction de $(1 + (\ln x)^2)'$.

b)

Dériver la couche interne $1 + (\ln x)^2$.

c)

Assembler et montrer que $y' = \frac{\ln x}{x\sqrt{1 + (\ln x)^2}}$.

Exo 7 7 – tangente à une composée

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$, définie sur $\mathbb{R}$. On s'intéresse au point d'abscisse $x_0 = 4$.

a)

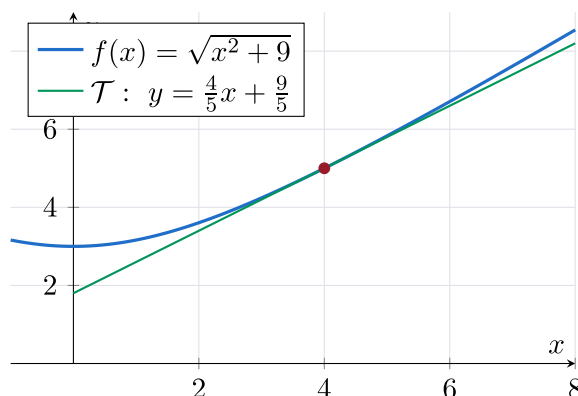
Calculer $f'(x)$, puis $f(4)$ et $f'(4)$.

b)

En déduire l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe au point d'abscisse 4.

c)

La figure ci-dessous représente f et sa tangente en $x = 4$; vérifier la cohérence (pente et ordonnée à l'origine).



Exo 8 8 – chaîne avec une fonction inconnue (valeurs numériques)

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(2) = 5$ et $f'(2) = -1$. Calculer, en fonction de ces données :

a)

$$g'(2) \text{ où } g(x) = f(3x - 4).$$

b)

$$h'(2) \text{ où } h(x) = (f(x))^3.$$

c)

$$k'(2) \text{ où } k(x) = e^{f(x)}.$$

Exo 9 9 – dérivée seconde et points d'inflexion

Soit $y = e^{-x^2}$ (la « courbe en cloche »).

a)

Calculer y' .

b)

Calculer y'' et montrer que $y'' = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$.

c)

En déduire les abscisses des points d'inflexion.

Exo 10 10 – arc sinus d'une racine

Soit $y = \arcsin(\sqrt{x})$.

a)

Déterminer le domaine de définition, puis de dérivabilité.

b)

Calculer y' (deux couches : $\arcsin$ puis $\sqrt{}$).

c)

Simplifier y' sous la forme $\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$.

Exo 11 11 – optimisation : rectangle inscrit dans un demi-disque

Un rectangle est inscrit dans un demi-disque de rayon 2, sa base reposant sur le diamètre. Si $x \in]0, 2[$ désigne la *demi-largeur*, sa hauteur vaut $\sqrt{4 - x^2}$ et son aire $A(x) = 2x\sqrt{4 - x^2}$.

a)

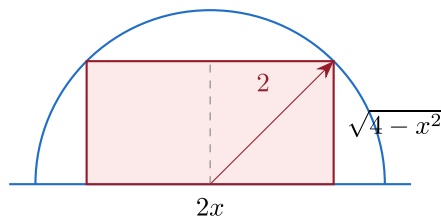
Calculer $A'(x)$ et montrer que $A'(x) = \frac{4(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}$.

b)

Résoudre $A'(x) = 0$ sur $]0, 2[$.

c)

En déduire l'aire maximale.



Exo 12 12 – modèle logistique

La taille d'une population est $P(t) = \frac{1000}{1+9e^{-0,5t}}$ (pour $t \geq 0$).

a)

Calculer $P'(t)$ (quotient et chaîne).

b)

Justifier que P est strictement croissante.

c)

Montrer que $P' = \frac{0,5}{1000} P (1000 - P)$ (équation logistique).

Exo 13 13 – une identité obtenue par dérivation

Soit $y = \ln(\operatorname{tg}(x/2))$, pour $x \in]0, \pi[$.

a)

Justifier que y est bien défini sur $]0, \pi[$.

b)

Calculer y' (chaîne : $\ln$, puis tg , puis $x/2$).

c)

Simplifier et montrer que $y' = \frac{1}{\sin x}$.

Exo 14 14 – étude complète de $\ln(1 + x^2)$

Soit $f(x) = \ln(1 + x^2)$, définie sur $\mathbb{R}$.

a)

Calculer $f'(x)$ et étudier son signe (sens de variation).

b)

Calculer $f''(x)$ et déterminer les intervalles de convexité.

c)

Donner les abscisses des points d'inflexion.



DEUXIÈME PARTIE

Corrigés

Chaque exercice repris pas à pas, niveau par niveau.
Compare ta démarche, pas seulement ton résultat.





Une seconde – avant d'ouvrir le corrigé...



Si ce carnet t'aide, rends-nous la pareille : parle de simulationconcours.be à quelqu'un qui prépare le concours. C'est comme ça qu'on peut continuer.

Ce qu'on a préparé pour toi

- ✓ Ce carnet en interactif, avec correction en un clic
- ✓ Les cours complets, chapitre par chapitre – gratuits
- ✓ 3100 QCM type concours, corrigés et expliqués
- ✓ Des fiches de révision à imprimer

Tous les jeudis : simulation du concours en ligne

En conditions réelles – chrono, QCM type concours et score immédiat.



Rejoins-nous sur simulationconcours.be

scanne le QR ou tape l'adresse – puis reviens vérifier tes réponses

Les corrigés

FACILE 15 exercices

Exo 1 1 – puissance d'une fonction

Externe : puissance 5. Intérieur $U = 2x + 1$, donc $U' = 2$. Formule $(U^n)' = nU^{n-1}U'$:

$$y' = 5(2x + 1)^4 \cdot 2 = 10(2x + 1)^4.$$

Exo 2 2 – sinus et cosinus d'une composée

• $U = 3x, U' = 3$, formule $(\sin U)' = U' \cos U$:

$$y' = 3 \cos(3x).$$

• $U = x^2, U' = 2x$, formule $(\cos U)' = -U' \sin U$:

$$y' = -2x \sin(x^2).$$

Exo 3 3 – exponentielle composée

• $U = 2x, U' = 2$, formule $(e^U)' = U' e^U$:

$$y' = 2e^{2x}.$$

• $U = -x^2, U' = -2x$:

$$y' = -2x e^{-x^2}.$$

Exo 4 4 – logarithme composé

$U = x^2 + 1, U' = 2x$, formule $(\ln U)' = \frac{U'}{U}$:

$$y' = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

(Défini sur $\mathbb{R}$ car $x^2 + 1 > 0$.)

Exo 5 5 – racine composée

$U = x^2 + 1, U' = 2x$, formule $(\sqrt{U})' = \frac{U'}{2\sqrt{U}}$:

$$y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Exo 6 6 – puissance d'une fonction affine

a)

$$U = 3x - 4, U' = 3, (U^n)' = nU^{n-1}U' : y' = 7(3x - 4)^6 \cdot 3 = 21(3x - 4)^6.$$

b)

$$U = 1 - x^2, U' = -2x : y' = 4(1 - x^2)^3 \cdot (-2x) = -8x(1 - x^2)^3.$$

Exo 7 7 – racine carrée composée

a)

$$U = 4x + 3, U' = 4, (\sqrt{U})' = \frac{U'}{2\sqrt{U}} : y' = \frac{4}{2\sqrt{4x+3}} = \frac{2}{\sqrt{4x+3}}, \text{ pour } x > -\frac{3}{4}.$$

b)

$$U = 1 - x, U' = -1 : y' = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}, \text{ pour } x < 1.$$

Exo 8 8 – exponentielle composée

a)

$$U = 5x + 1, U' = 5, (e^U)' = U'e^U : y' = 5e^{5x+1}.$$

b)

$$U = x^3, U' = 3x^2 : y' = 3x^2 e^{x^3}.$$

Exo 9 9 – logarithme composé

a)

$$U = 3x + 2, U' = 3, (\ln U)' = \frac{U'}{U} : y' = \frac{3}{3x+2} \text{ (pour } x > -\frac{2}{3}\text{)}.$$

b)

$$U = 5x, U' = 5 : y' = \frac{5}{5x} = \frac{1}{x}. \text{ La constante multiplicative 5 disparaît, car } \ln(5x) = \ln 5 + \ln x \text{ a la même dérivée que } \ln x.$$

Exo 10 10 – sinus et cosinus composés

a)

$$U = 4x - 1, U' = 4, (\sin U)' = U' \cos U : y' = 4 \cos(4x - 1).$$

b)

$$U = \frac{x}{2}, U' = \frac{1}{2}, (\cos U)' = -U' \sin U : y' = -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{x}{2}\right).$$

Exo 11 11 – fonction inverse (puissance -1)

a)

$$y = (2x + 1)^{-1} : y' = -1 (2x + 1)^{-2} \cdot 2 = -\frac{2}{(2x+1)^2}.$$

b)

$$y = (x^2 + 1)^{-2} : y' = -2(x^2 + 1)^{-3} \cdot 2x = -\frac{4x}{(x^2+1)^3}.$$

Exo 12 12 – exposant fractionnaire

a)

$$y' = \frac{3}{2}(x^2 + 1)^{1/2} \cdot 2x = 3x\sqrt{x^2 + 1}.$$

b)

$$y' = \frac{2}{3}(x^3 + 1)^{-1/3} \cdot 3x^2 = \frac{2x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}.$$

Exo 13 13 – décroissance exponentielle (situation)

a)

$$U = -0,4t, U' = -0,4 : C'(t) = 5 \cdot (-0,4)e^{-0,4t} = -2e^{-0,4t}.$$

b)

$e^{-0,4t} > 0$, donc $C'(t) < 0$: la concentration est *strictement décroissante* (le médicament s'élimine).

Exo 14 14 – oscillations (situation)

a)

$$U = 3t, U' = 3 : h'(t) = 2 \cdot 3 \cos(3t) = 6 \cos(3t).$$

b)

$$g'(t) = -2 \sin(2t) \text{ (la constante 1 disparaît).}$$

Exo 15 15 – racine d'un trinôme et domaine

a)

$9 - x^2 \geq 0 \iff x \in [-3, 3]$: domaine de définition. La racine n'est pas dérivable là où $9 - x^2 = 0$, d'où la dérivabilité sur $] -3, 3[$.

b)

$$U = 9 - x^2, U' = -2x : y' = \frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}.$$

MOYEN 15 exercices

Exo 1 1 – fonctions réciproques composées

- $U = 3x, U' = 3$, formule $(\operatorname{arctg} U)' = \frac{U'}{1+U^2}$:

$$y' = \frac{3}{1 + (3x)^2} = \frac{3}{1 + 9x^2}.$$

- $U = x^2, U' = 2x$, formule $(\arcsin U)' = \frac{U'}{\sqrt{1-U^2}}$:

$$y' = \frac{2x}{\sqrt{1 - (x^2)^2}} = \frac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}.$$

Exo 2 2 – base quelconque

- Formule $(\log_a U)' = \frac{U'}{U \ln a}$ avec $U = x, U' = 1, a = 10$:

$$y' = \frac{1}{x \ln 10}.$$

- Formule $(a^U)' = U' a^U \ln a$ avec $U = x, U' = 1, a = 2$:

$$y' = 2^x \ln 2.$$

Exo 3 3 – tangente et cotangente composées

- $U = 2x, U' = 2$, formule $(\operatorname{tg} U)' = \frac{U'}{\cos^2 U}$:

$$y' = \frac{2}{\cos^2(2x)}.$$

- $U = x, U' = 1$, formule $(\operatorname{cotg} U)' = -\frac{U'}{\sin^2 U}$:

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Exo 4 4 – produit et exponentielle

Règle du produit $(uv)' = u'v + uv'$ avec $u = x^2 (u' = 2x)$ et $v = e^x (v' = e^x)$:

$$y' = 2x e^x + x^2 e^x = x(2 + x)e^x.$$

Exo 5 5 – produit de deux composées

Règle du produit avec $u = e^x$ ($u' = e^x$) et $v = \sin x$ ($v' = \cos x$):

$$y' = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x (\sin x + \cos x).$$

Exo 6 6 – quotient et chaîne

a)

Quotient $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u = e^{2x}$ ($u' = 2e^{2x}$), $v = x + 1$:

$$y' = \frac{2e^{2x}(x+1) - e^{2x}}{(x+1)^2} = \frac{(2x+1)e^{2x}}{(x+1)^2}.$$

b)

$y = x(x^2 + 1)^{-1/2}$ (produit):

$$y' = (x^2 + 1)^{-1/2} + x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) (x^2 + 1)^{-3/2} \cdot 2x = \frac{(x^2 + 1) - x^2}{(x^2 + 1)^{3/2}} = \frac{1}{(x^2 + 1)^{3/2}}.$$

Exo 7 7 – produit et exponentielle composée

a)

$u = x, v = e^{-x^2}$ ($v' = -2x e^{-x^2}$): $y' = e^{-x^2} + x(-2x e^{-x^2}) = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$.

b)

$u = 2x + 1$ ($u' = 2$), $v = e^{3x}$ ($v' = 3e^{3x}$): $y' = 2e^{3x} + (2x + 1)3e^{3x} = (6x + 5)e^{3x}$.

Exo 8 8 – puissance et racine d'un trinôme

a)

$U = x^2 - 3x + 1, U' = 2x - 3$: $y' = 4(x^2 - 3x + 1)^3(2x - 3)$.

b)

$U = x^2 + x + 1 > 0, U' = 2x + 1$: $y' = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$.

Exo 9 9 – logarithme d'un quotient

a)

$y = \ln(x - 1) - \ln(x + 1)$ (valable pour $x > 1$).

b)

$$y' = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1)-(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{x^2-1}.$$

Exo 10 10 – base quelconque composée

a)

$$(a^U)' = U' a^U \ln a \text{ avec } U = x^2, a = 3 : y' = 2x \cdot 3^{x^2} \ln 3.$$

b)

$$(\log_a U)' = \frac{U'}{U \ln a} \text{ avec } U = x^2 + 1, a = 2 : y' = \frac{2x}{(x^2+1) \ln 2}.$$

Exo 11 11 – composée de deux fonctions transcendentes

a)

$$\text{Externe sin}, U = \cos x, U' = -\sin x : y' = -\sin x \cos(\cos x).$$

b)

$$\text{Externe cos}, U = e^x, U' = e^x : y' = -e^x \sin(e^x).$$

Exo 12 12 – fonctions réciproques composées

a)

$$U = \frac{1}{x} = x^{-1}, U' = -\frac{1}{x^2}, (\operatorname{arctg} U)' = \frac{U'}{1+U^2} :$$

$$y' = \frac{-1/x^2}{1 + 1/x^2} = \frac{-1/x^2}{(x^2 + 1)/x^2} = -\frac{1}{x^2 + 1}.$$

C'est l'opposé de $(\operatorname{arctg} x)'$, cohérent avec $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \pm \frac{\pi}{2}$.

b)

$$U = 2x, U' = 2, (\arcsin U)' = \frac{U'}{\sqrt{1-U^2}} : y' = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}, \text{ pour } x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[.$$

Exo 13 13 – carré d'une fonction trigonométrique

a)

$$y = (\operatorname{tg} x)^2, (F^2)' = 2FF' \text{ avec } F = \operatorname{tg} x, F' = \frac{1}{\cos^2 x} : y' = 2 \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}.$$

b)

$$U = \cos x, U' = -\sin x, (\ln U)' = \frac{U'}{U} : y' = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x, \text{ là où } \cos x > 0.$$

Exo 14 14 – exponentielle d'une fonction non affine

a)

$$U = \frac{1}{x}, U' = -\frac{1}{x^2} : y' = -\frac{1}{x^2} e^{1/x}.$$

b)

$$U = \sqrt{x}, U' = \frac{1}{2\sqrt{x}} : y' = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}.$$

Exo 15 15 – refroidissement de Newton (situation)

a)

$$U = -0,1t, U' = -0,1 : T'(t) = 80 \cdot (-0,1)e^{-0,1t} = -8e^{-0,1t}.$$

b)

$e^{-0,1t} > 0$ donc $T'(t) < 0$: la température décroît, le café refroidit et tend vers la température ambiante 20 (car $e^{-0,1t} \rightarrow 0$).

DIFFICILE 14 exercices

Exo 1 1 – trois couches : carré ◦ sinus ◦ racine

a)

Externe = le carré. Avec $(F^2)' = 2F \cdot F'$ appliqué à $F = \sin(\sqrt{x} + 1)$:

$$y' = 2 \sin(\sqrt{x} + 1) \cdot (\sin(\sqrt{x} + 1))'.$$

b)

Pour $\sin(\sqrt{x} + 1)$: couche externe sin, intérieur $U = \sqrt{x} + 1$ avec $U' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Donc $(\sin U)' = U' \cos U$:

$$(\sin(\sqrt{x} + 1))' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos(\sqrt{x} + 1).$$

c)

On assemble :

$$y' = 2 \sin(\sqrt{x} + 1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos(\sqrt{x} + 1) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \underbrace{2 \sin(\sqrt{x} + 1) \cos(\sqrt{x} + 1)}_{= \sin(2(\sqrt{x}+1))}.$$

D'où, avec $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$ ($\theta = \sqrt{x} + 1$) :

$$\boxed{y' = \frac{\sin(2(\sqrt{x} + 1))}{2\sqrt{x}}} \quad \text{pour } x > 0$$

(on exclut $x = 0$ car $\sqrt{x}$ y est non dérivable et le dénominateur s'annule).

Exo 2 2 – racine ◦ logarithme ◦ cosinus

a)

On écrit $y = (\ln(\cos x + 2))^{1/2}$. Couche puissance $\frac{1}{2}$, avec $F = \ln(\cos x + 2)$ et $(F^{1/2})' = \frac{F'}{2\sqrt{F}}$:

$$y' = \frac{(\ln(\cos x + 2))'}{2\sqrt{\ln(\cos x + 2)}}.$$

b)

Couche $\ln$: $U = \cos x + 2$, $U' = -\sin x$, donc $(\ln U)' = \frac{U'}{U}$:

$$(\ln(\cos x + 2))' = \frac{-\sin x}{\cos x + 2}.$$

c)

On assemble :

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\ln(\cos x + 2)}} \cdot \frac{-\sin x}{\cos x + 2} = \boxed{\frac{-\sin x}{2(\cos x + 2)\sqrt{\ln(\cos x + 2)}}}.$$

(Comme $\cos x + 2 \geq 1$, on a $\ln(\cos x + 2) \geq 0$; il faut $\ln(\cos x + 2) > 0$, soit $\cos x + 2 > 1$, i.e. $\cos x \neq -1$.)

Exo 3 3 – fonction inconnue f

a) $f^2 = f \cdot f$. Règle du produit : $(f \cdot f)' = f'f + ff' = 2f'f$. (Ou bien $(U^2)' = 2UU'$ avec $U = f$.)
Donc $(f^2)' = 2f'f$. b) $(\ln |f|)' = \frac{f'}{f}$ (formule $(\ln |U|)' = U'/U$). En multipliant par la constante 3 :
 $(3 \ln |f|)' = \frac{3f'}{f}$. c) $f(x) = x^2 + 1$, donc $f'(x) = 2x$.

$$(f^2)' = 2f'f = 2(2x)(x^2 + 1) = 4x(x^2 + 1), \quad (3 \ln |f|)' = \frac{3f'}{f} = \frac{6x}{x^2 + 1}.$$

Exo 4 4 – fonction inconnue u et changement de variable

a) $v(x) = u(3x)$: externe u , intérieur $U = 3x$ avec $U' = 3$. La chaîne donne $v'(x) = u'(3x) \cdot 3 = 3u'(3x)$.

Si $u(x) = x^2$, alors $u'(x) = 2x$, donc $u'(3x) = 2(3x) = 6x$ et $v'(x) = 3 \cdot 6x = 18x$.

Vérification directe : $v(x) = u(3x) = (3x)^2 = 9x^2$, d'où $v'(x) = 18x$. b) $v(x) = u(\ln(x + 1))$: externe u , intérieur $U = \ln(x + 1)$ avec $U' = \frac{1}{x+1}$. Donc

$$v'(x) = u'(\ln(x+1)) \cdot \frac{1}{x+1} = \frac{u'(\ln(x+1))}{x+1} \quad (x > -1).$$

Exo 5 5 – dérivée logarithmique

a)

$$\ln y = 3 \ln(x+1) + \frac{1}{2} \ln(2x-1) - 2 \ln(x^2+1).$$

b)

En dérivant chaque terme $((\ln U)' = U'/U)$:

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{x+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2x-1} - 2 \cdot \frac{2x}{x^2+1} = \frac{3}{x+1} + \frac{1}{2x-1} - \frac{4x}{x^2+1}.$$

c)

Donc

$$y' = \frac{(x+1)^3 \sqrt{2x-1}}{(x^2+1)^2} \left(\frac{3}{x+1} + \frac{1}{2x-1} - \frac{4x}{x^2+1} \right).$$

Exo 6 6 – trois couches : racine ◦ carré ◦ logarithme

a)

$$\text{Avec } F = 1 + (\ln x)^2 \text{ et } (\sqrt{F})' = \frac{F'}{2\sqrt{F}} : y' = \frac{(1 + (\ln x)^2)'}{2\sqrt{1 + (\ln x)^2}}.$$

b)

$$(1 + (\ln x)^2)' = 2 \ln x \cdot (\ln x)' = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x}{x}.$$

c)

En assemblant :

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1 + (\ln x)^2}} \cdot \frac{2 \ln x}{x} = \frac{\ln x}{x\sqrt{1 + (\ln x)^2}}.$$

Exo 7 7 – tangente à une composée

a)

$$U = x^2 + 9, U' = 2x : f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}. \text{ Ainsi } f(4) = \sqrt{25} = 5 \text{ et } f'(4) = \frac{4}{5}.$$

b)

$$\mathcal{T} : y = f(4) + f'(4)(x - 4) = 5 + \frac{4}{5}(x - 4) = \frac{4}{5}x + \frac{9}{5}.$$

c)

Pente $\frac{4}{5} = 0,8$ et ordonnée à l'origine $\frac{9}{5} = 1,8$: c'est bien la droite tracée, qui touche la courbe au point $(4, 5)$.

Exo 8 8 – chaîne avec une fonction inconnue (valeurs numériques)

a)

$$g(x) = f(3x - 4), g'(x) = 3f'(3x - 4). \text{ En } x = 2 : 3x - 4 = 2, \text{ donc } g'(2) = 3f'(2) = 3(-1) = -3.$$

b)

$$h(x) = (f(x))^3, h'(x) = 3(f(x))^2 f'(x) : h'(2) = 3 \cdot 5^2 \cdot (-1) = -75.$$

c)

$$k(x) = e^{f(x)}, k'(x) = f'(x)e^{f(x)} : k'(2) = (-1)e^5 = -e^5.$$

Exo 9 9 – dérivée seconde et points d'inflexion

a)

$$U = -x^2, U' = -2x : y' = -2x e^{-x^2}.$$

b)

$$y'' = (-2x e^{-x^2})' = -2e^{-x^2} + (-2x)(-2x)e^{-x^2} = (-2 + 4x^2)e^{-x^2} = (4x^2 - 2)e^{-x^2}.$$

c)

$e^{-x^2} > 0$, donc $y'' = 0 \iff 4x^2 - 2 = 0 \iff x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. y'' change de signe en ces points : ce sont deux points d'inflexion.

Exo 10 10 – arc sinus d'une racine

a)

Il faut $x \geq 0$ (racine) et $\sqrt{x} \leq 1$, soit $x \leq 1$: domaine $[0, 1]$. Dérivabilité sur $]0, 1[$ ($\sqrt{}$ non dérivable en 0, arcsin non dérivable en 1).

b)

$$F = \sqrt{x}, F' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, (\arcsin F)' = \frac{F'}{\sqrt{1-F^2}} : y' = \frac{1/(2\sqrt{x})}{\sqrt{1-x}}.$$

c)

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}.$$

Exo 11 11 – optimisation : rectangle inscrit dans un demi-disque

a)

Produit avec $u = 2x$ ($u' = 2$) et $v = \sqrt{4 - x^2}$ ($v' = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$):

$$A'(x) = 2\sqrt{4 - x^2} + 2x \cdot \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{2(4 - x^2) - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{4(2 - x^2)}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

b)

Sur $]0, 2[$, $\sqrt{4 - x^2} > 0$, donc $A'(x) = 0 \iff 2 - x^2 = 0 \iff x = \sqrt{2}$.

c)

A' est positive avant $\sqrt{2}$ et négative après : maximum en $x = \sqrt{2}$. $A(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{4 - 2} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4$. Aire maximale = 4.

Exo 12 12 – modèle logistique

a)

$P = 1000(1 + 9e^{-0,5t})^{-1}$. Avec $D = 1 + 9e^{-0,5t}$, $D' = 9 \cdot (-0,5)e^{-0,5t} = -4,5 e^{-0,5t}$:

$$P' = -1000 D^{-2} D' = \frac{4500 e^{-0,5t}}{(1 + 9e^{-0,5t})^2}.$$

b)

$e^{-0,5t} > 0$ et le dénominateur est un carré > 0 , donc $P'(t) > 0$: P est strictement croissante.

c)

$1000 - P = \frac{9000 e^{-0,5t}}{1 + 9e^{-0,5t}}$, donc

$$\frac{0,5}{1000} P (1000 - P) = \frac{0,5}{1000} \cdot \frac{1000}{1 + 9e^{-0,5t}} \cdot \frac{9000 e^{-0,5t}}{1 + 9e^{-0,5t}} = \frac{4500 e^{-0,5t}}{(1 + 9e^{-0,5t})^2} = P'.$$

Exo 13 13 – une identité obtenue par dérivation

a)

Pour $x \in]0, \pi[$, on a $x/2 \in]0, \pi/2[$, donc $\operatorname{tg}(x/2) > 0$: le logarithme est défini.

b)

$$U = \operatorname{tg}(x/2), U' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2(x/2)}, (\ln U)' = \frac{U'}{U} :$$

$$y' = \frac{\frac{1}{2} / \cos^2(x/2)}{\operatorname{tg}(x/2)} = \frac{1}{2 \cos^2(x/2)} \cdot \frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)} = \frac{1}{2 \sin(x/2) \cos(x/2)}.$$

c)

$$\text{Or } 2 \sin(x/2) \cos(x/2) = \sin x, \text{ donc } y' = \frac{1}{\sin x}.$$

Exo 14 14 – étude complète de $\ln(1 + x^2)$

a)

$U = 1 + x^2, U' = 2x : f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$. Le dénominateur est > 0 , donc $f'(x)$ a le signe de x : f décroît sur $] -\infty, 0]$, croît sur $[0, +\infty[$ (minimum $f(0) = 0$).

b)

$f''(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$: elle est > 0 sur $] -1, 1[$ (convexe) et < 0 sur $] -\infty, -1[\cup] 1, +\infty[$ (concave).

c)

f'' s'annule en changeant de signe en $x = -1$ et $x = 1$: deux points d'inflexion.



Tous les exos cochés ? Passe au niveau réel.

+

Ce carnet est un extrait de notre bibliothèque d'entraînement — la suite se joue en ligne.

Sur simulationconcours.be

- ✓ Le même carnet en interactif, avec correction en un clic
- ✓ Les autres mécaniques de la fiche, niveau par niveau
- ✓ 3100 QCM type concours, corrigés et expliqués
- ✓ Les cours complets — gratuits — et les fiches de révision

Tous les jeudis : simulation du concours en ligne

En conditions réelles — chrono, QCM type concours et score immédiat.



Rejoins-nous sur simulationconcours.be

scanne le QR ou tape l'adresse — les cours complets sont gratuits