



simulationconcours.be



Mathématiques

Carnet d'entraînement



Formulaire de dérivation

Dérivation · Mécanique 2 — des exercices calibrés concours, du plus simple au plus retors.

44 exercices

3 niveaux

corrigés détaillés

Comment bosser ce carnet

- ✓ Lis d'abord le tutoriel : la mécanique y est expliquée pas à pas
- ✓ Fais chaque niveau en entier **avant** d'ouvrir les corrigés
- ✓ Note à côté de chaque exo : réussi, hésité ou raté — et rejoue les ratés 48 h plus tard



simulationconcours.be

scanne & continue en ligne

Sommaire

- 1 Le tutoriel — la mécanique expliquée
- 2 Les exercices Facile x15 · Moyen x15 · Difficile x14
- 3 Les corrigés détaillés exercice par exercice

Le tutoriel

Ce document est un **carnet d'exercices** : on t'explique d'abord la mécanique, puis tu la travailles sur 44 exercices classés en trois niveaux. Les corrigés détaillés t'attendent en deuxième partie, après la page « Corrigés » — pas avant de l'avoir mérité.

À RETENIR les six règles de base

Pour deux fonctions dérivables U et V et une constante $a \in \mathbb{R}$:

N°	Fonction	Dérivée
1	Constante $y = C$	$C' = 0$
2	Variable $y = x$	$x' = 1$
3	Puissance $y = x^n$	$(x^n)' = n x^{n-1}$
4	Somme et multiple $y = aU + bV$	$(aU + bV)' = aU' + bV'$
5	Produit $y = UV$	$(UV)' = U'V + UV'$
6	Quotient $y = \frac{U}{V}$	$(\frac{U}{V})' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$

La règle 3 est valable pour *tout* exposant réel n (entier, négatif ou fractionnaire) : c'est elle qui gère les racines et les inverses.

☞ MÉTHODE réécrire les racines et les inverses en puissances

Avant de dériver, on transforme toute racine ou tout inverse en une puissance x^n , puis on applique $(x^n)' = n x^{n-1}$:

$$\sqrt{x} = x^{1/2}, \quad \sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}, \quad \frac{1}{x^n} = x^{-n}, \quad \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}.$$

Exemple d'automatisme : $y = \sqrt{x} = x^{1/2} \Rightarrow y' = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

De même $y = \frac{1}{x^3} = x^{-3} \Rightarrow y' = -3 x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$.

⚠ PIÈGE les deux erreurs classiques

- **Produit** : $(UV)' \neq U'V'$. Il faut deux termes : $(UV)' = U'V + UV'$.
- **Quotient** : l'ordre du numérateur est imposé : $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$, **jamais** $\frac{UV' - U'V}{V^2}$. Le terme qui commence par U' vient en premier, et le dénominateur est V^2 (le carré du dénominateur, pas de U).

🔗 EXEMPLE un produit : $y = x\sqrt{x}$

On pose $U = x$ et $V = \sqrt{x} = x^{1/2}$, d'où $U' = 1$ et $V' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$y' = U'V + UV' = 1 \cdot \sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

Vérification par réécriture directe : $y = x \cdot x^{1/2} = x^{3/2}$, donc $y' = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

🔗 EXEMPLE un quotient : $y = \frac{x^2}{x^2+1}$

On pose $U = x^2$ et $V = x^2 + 1$, d'où $U' = 2x$ et $V' = 2x$.

$$y' = \frac{U'V - UV'}{V^2} = \frac{2x(x^2 + 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

Le terme $U'V$ est bien écrit *en premier*, et on développe le numérateur avant de simplifier.

Les exercices

FACILE 15 exercices**Exo 1** 1 – dérivée d'une constanteDériver $y = 12$.**Exo 2** 2 – puissances entièresDériver $y = x^6$, puis $y = 4x^3$.**Exo 3** 3 – combinaison de puissancesDériver $y = 5x^4 - 3x^2 + 7x - 9$.**Exo 4** 4 – racines réécrites en puissancesRéécrire en puissance, puis dériver : $y = \sqrt{x}$; $y = \sqrt[3]{x}$.**Exo 5** 5 – inverses réécrits en puissancesRéécrire en puissance, puis dériver : $y = \frac{1}{x^3}$; $y = \frac{2}{x}$.**Exo 6** 6 – coefficients devant les puissances**a)**

$$y = 7x^5$$

b)

$$y = -3x^8$$

c)

$$y = \frac{1}{2}x^4$$

Exo 7 7 – polynôme dérivé terme à terme**a)**

$$y = 2x^4 - 5x^3 + x - 6$$

b)

$$y = 9x^2 - 4x + 10$$

Exo 8 8 – inverses (exposants négatifs)Réécris d'abord en puissance de x , puis dérive.

a)

$$y = \frac{1}{x^5}$$

b)

$$y = \frac{3}{x^2}$$

c)

$$y = -\frac{4}{x}$$

Exo 9 9 – racines réécrites en puissances

Réécris en puissance de x , puis dérive.

a)

$$y = \sqrt[4]{x}$$

b)

$$y = \sqrt[3]{x^2}$$

c)

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Exo 10 10 – coefficient et somme avec racine**a)**

$$y = 6\sqrt{x}$$

b)

$$y = \sqrt{x} + x$$

Exo 11 11 – puissances fractionnaires directes**a)**

$$y = x^{3/2}$$

b)

$$y = x^{5/2}$$

Exo 12 12 – puissances et inverses mélangés**a)**

$$y = x^3 - \frac{2}{x^2}$$

b)

$$y = 5x^2 + \frac{1}{x}$$

Exo 13 13 – racine et puissance dans la même somme**a)**

$$y = 4\sqrt{x} - x^3$$

b)

$$y = \sqrt[3]{x} + x^2$$

Exo 14 14 – simplifier avant de dériver

Simplifie l'écriture en une seule puissance, puis dérive.

a)

$$y = \frac{x^5}{x^2}$$

b)

$$y = \frac{x^6}{x^4}$$

c)

$$y = \frac{3x^4}{x}$$

Exo 15 15 – constante sur une racine

Réécrit en puissance de x , puis dérive.

a)

$$y = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

b)

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

MOYEN 15 exercices**Exo 1** 1 – règle du produit

Dériver $y = (x^2 + 1)(x - 3)$ à l'aide de la règle du produit.

Exo 2 2 – produit avec racine

Dériver $y = x\sqrt{x}$ par la règle du produit, puis vérifier le résultat en réécrivant $y = x^{3/2}$.

Exo 3 3 – quotient affine

Dériver $y = \frac{2x-1}{x+3}$.

Exo 4 4 – quotient avec carré

Dériver $y = \frac{x^2}{x^2+1}$.

Exo 5 5 – quotient affine

Dériver $y = \frac{x+1}{x-1}$.

Exo 6 6 – règle du produit

Soit $y = (3x + 2)(x^2 - x)$.

a)

Dériver par la règle du produit.

b)

En déduire la valeur de $y'(1)$.

Exo 7 7 – produit puissance et binôme

Soit $y = x^3(2x - 5)$.

a)

Dériver par la règle du produit.

b)

Vérifier en développant y avant de dériver.

Exo 8 8 – produit avec racine

Soit $y = (x + 1)\sqrt{x}$.

a)

Dériver par la règle du produit.

b)

Réduire au même dénominateur $2\sqrt{x}$.

Exo 9 9 – quotient polynôme sur affine

Soit $y = \frac{x^2-1}{x+2}$.

a)

Dériver par la règle du quotient.

b)

Calculer $y'(0)$.

Exo 10 10 – quotient d'une constante

Soit $y = \frac{3}{x^2+1}$.

a)

Dériver par la règle du quotient.

b)

Pour quelle valeur de x a-t-on $y' = 0$?

Exo 11 11 – quotient et point d'annulation

Soit $y = \frac{2x}{x^2+1}$.

a)

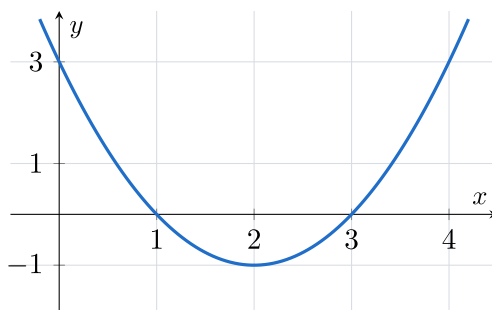
Dériver par la règle du quotient.

b)

Calculer $y'(1)$.

Exo 12 12 – produit et pente de la tangente

La parabole ci-dessous est la courbe de $f(x) = (x-1)(x-3)$.



a)

Dériver f par la règle du produit.

b)

Calculer $f'(2)$; que vaut la pente de la tangente au sommet ?

Exo 13 13 – quotient affine et sens de variation

Soit $y = \frac{5x+2}{x-1}$.

a)

Dériver par la règle du quotient.

b)

En déduire le signe de y' et le sens de variation sur chaque intervalle.

Exo 14 14 – règle du produit

Soit $y = (x^2 + 3)(2x - 1)$.

a)

Dériver par la règle du produit.

b)

Vérifier en développant y avant de dériver.

Exo 15 15 – quotient à numérateur carré

Soit $y = \frac{x^2}{2x-1}$.

a)

Dériver par la règle du quotient.

b)

Calculer $y'(1)$.

DIFFICILE 14 exercices

Exo 1 1 – produit avec racine et réduction

On considère $y = (x^2 - 1)\sqrt{x}$.

1 Poser U, V et calculer U', V' .

2 Appliquer la règle du produit.

3 Réduire au même dénominateur pour obtenir $\frac{5x^2-1}{2\sqrt{x}}$.

Exo 2 2 – quotient avec développement

On considère $y = \frac{x^2+2x}{x^2+1}$.

1 Poser U, V, U', V' .

2 Appliquer la règle du quotient.

3 Développer le numérateur pour obtenir $\frac{-2x^2+2x+2}{(x^2+1)^2}$.

Exo 3 3 – quotient affine à simplifier

On considère $y = \frac{3x-2}{2x+1}$.

a)

Dériver par la règle du quotient.

b)

Simplifier le numérateur pour obtenir $\frac{7}{(2x+1)^2}$.

Exo 4 4 – produit vs développement

On considère $y = x(x^2 - 4)$.

a)

Dériver par la règle du produit ; montrer que $y' = 3x^2 - 4$.

b)

Dériver après développement (en écrivant d'abord $y = x^3 - 4x$).

c)

Vérifier que les deux résultats coïncident.

Exo 5 5 – produit de trois facteurs

Soit $y = x(x - 1)(x + 2)$.

a)

Grouper $U = x(x - 1)$ et $V = x + 2$, puis dériver par la règle du produit.

b)

Vérifier en développant y entièrement avant de dériver.

c)

En admettant la formule $(UVW)' = U'VW + UV'W + UVW'$, retrouver le résultat.

Exo 6 6 – quotient à numérateur factorisé

Soit $y = \frac{x(x+1)}{x-1}$.

a)

Écrire le numérateur sous forme développée.

b)

Dériver par la règle du quotient et réduire le numérateur.

c)

Calculer $y'(0)$.

Exo 7 7 – quotient avec une racine

Soit $y = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$.

a)

Poser U, V, U', V' .

b)

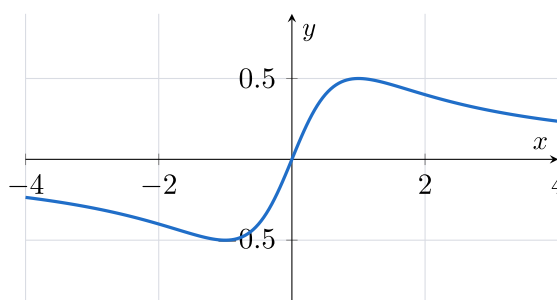
Appliquer la règle du quotient.

c)

Réduire le numérateur au dénominateur $2\sqrt{x}$ pour obtenir $\frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$.

Exo 8 8 – dérivée et tangente à l'origine

On considère $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, dont la courbe est tracée ci-dessous.



a)

Dériver f par la règle du quotient.

b)

Calculer $f'(0)$ et donner l'équation de la tangente à la courbe en O .

Exo 9 9 – produit contre réécriture

Soit $y = x^2\sqrt{x}$.

a)

Dériver par la règle du produit, puis réduire au même dénominateur.

b)

Dériver après réécriture $y = x^{5/2}$.

c)

Vérifier que les deux résultats coïncident.

Exo 10 10 – quotient et signe de la dérivée

Soit $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

a)

Dériver par la règle du quotient.

b)

Développer et réduire le numérateur.

c)

Étudier le signe de y' et en déduire le sens de variation.

Exo 11 11 – quotient contre puissances négatives

Soit $y = \frac{x+1}{x^2}$.

a)

Dériver par la règle du quotient et simplifier.

b)

Retrouver le résultat en réécrivant $y = x^{-1} + x^{-2}$.

c)

Vérifier la coïncidence des deux résultats.

Exo 12 12 – quotient de degré supérieur

Soit $y = \frac{x^3}{x^2+1}$.

a)

Poser U, V, U', V' , puis appliquer la règle du quotient.

b)

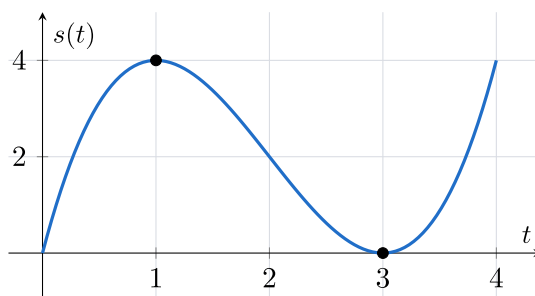
Développer et réduire le numérateur.

c)

Factoriser le numérateur et en déduire le signe de y' .

Exo 13 13 – vitesse instantanée

Un mobile se déplace sur un axe ; sa position (en mètres) à l'instant t (en secondes, $t \geq 0$) est $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$. Sa courbe est donnée ci-dessous.



a)

La vitesse est $v(t) = s'(t)$. Calculer $v(t)$.

b)

Déterminer les instants où le mobile est à l'arrêt ($v = 0$).

c)

Interpréter ces instants sur la courbe.

Exo 14 14 – synthèse : dérivée, extremums, tangente

Soit $f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$.

a)

Dériver f par la règle du quotient et réduire le numérateur.

b)

Résoudre $f'(x) = 0$.

c)

Donner l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.



DEUXIÈME PARTIE

Corrigés

Chaque exercice repris pas à pas, niveau par niveau.
Compare ta démarche, pas seulement ton résultat.





Une seconde – avant d'ouvrir le corrigé...



Si ce carnet t'aide, rends-nous la pareille : parle de simulationconcours.be à quelqu'un qui prépare le concours. C'est comme ça qu'on peut continuer.

Ce qu'on a préparé pour toi

- ✓ Ce carnet en interactif, avec correction en un clic
- ✓ Les cours complets, chapitre par chapitre – gratuits
- ✓ 3100 QCM type concours, corrigés et expliqués
- ✓ Des fiches de révision à imprimer

Tous les jeudis : simulation du concours en ligne

En conditions réelles – chrono, QCM type concours et score immédiat.



Rejoins-nous sur simulationconcours.be

scanne le QR ou tape l'adresse – puis reviens vérifier tes réponses

Les corrigés

FACILE 15 exercices

Exo 1 1 – dérivée d'une constante

$y = 12$ est une constante, donc

$$y' = 0.$$

Exo 2 2 – puissances entières

Règle $(x^n)' = n x^{n-1}$ et $(aU)' = aU'$:

$$y = x^6 \Rightarrow y' = 6 x^5; \quad y = 4x^3 \Rightarrow y' = 4 \cdot 3 x^2 = 12 x^2.$$

Exo 3 3 – combinaison de puissances

On dérive terme à terme (règle de la somme et du multiple) :

$$y = 5x^4 - 3x^2 + 7x - 9 \Rightarrow y' = 5 \cdot 4x^3 - 3 \cdot 2x + 7 \cdot 1 - 0 = 20x^3 - 6x + 7.$$

Exo 4 4 – racines réécrites en puissances

a) $y = \sqrt{x} = x^{1/2}$, donc

$$y' = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2 x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

b) $y = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$, donc

$$y' = \frac{1}{3} x^{-2/3} = \frac{1}{3 x^{2/3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Exo 5 5 – inverses réécrits en puissances

a) $y = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$, donc

$$y' = -3 x^{-4} = -\frac{3}{x^4}.$$

b) $y = \frac{2}{x} = 2x^{-1}$, donc

$$y' = 2 \cdot (-1) x^{-2} = -2 x^{-2} = -\frac{2}{x^2}.$$

Exo 6 6 – coefficients devant les puissances

a)

$$y' = 7 \cdot 5 x^4 = 35x^4.$$

b)

$$y' = -3 \cdot 8 x^7 = -24x^7.$$

c)

$$y' = \frac{1}{2} \cdot 4 x^3 = 2x^3.$$

Exo 7 7 – polynôme dérivé terme à terme

On dérive terme à terme (somme et multiple) :

a)

$$y' = 8x^3 - 15x^2 + 1.$$

b)

$$y' = 18x - 4.$$

Exo 8 8 – inverses (exposants négatifs)

a)

$$y = x^{-5} \Rightarrow y' = -5x^{-6} = -\frac{5}{x^6}.$$

b)

$$y = 3x^{-2} \Rightarrow y' = -6x^{-3} = -\frac{6}{x^3}.$$

c)

$$y = -4x^{-1} \Rightarrow y' = 4x^{-2} = \frac{4}{x^2}.$$

Exo 9 9 – racines réécrites en puissances

a)

$$y = x^{1/4} \Rightarrow y' = \frac{1}{4} x^{-3/4} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}.$$

b)

$$y = x^{2/3} \Rightarrow y' = \frac{2}{3} x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

c)

$$y = x^{-1/2} \Rightarrow y' = -\frac{1}{2}x^{-3/2} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}.$$

Exo 10 10 – coefficient et somme avec racine

a)

$$y = 6x^{1/2} \Rightarrow y' = 6 \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2} = 3x^{-1/2} = \frac{3}{\sqrt{x}}.$$

b)

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1.$$

Exo 11 11 – puissances fractionnaires directes

a)

$$y' = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

b)

$$y' = \frac{5}{2}x^{3/2}.$$

Exo 12 12 – puissances et inverses mélangés

a)

$$y = x^3 - 2x^{-2} \Rightarrow y' = 3x^2 + 4x^{-3} = 3x^2 + \frac{4}{x^3}.$$

b)

$$y = 5x^2 + x^{-1} \Rightarrow y' = 10x - x^{-2} = 10x - \frac{1}{x^2}.$$

Exo 13 13 – racine et puissance dans la même somme

a)

$$y' = 4 \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2} - 3x^2 = \frac{2}{\sqrt{x}} - 3x^2.$$

b)

$$y = x^{1/3} + x^2 \Rightarrow y' = \frac{1}{3}x^{-2/3} + 2x = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + 2x.$$

Exo 14 14 – simplifier avant de dériver

On simplifie l'exposant, puis on applique $(x^n)' = n x^{n-1}$:

a)

$$y = x^{5-2} = x^3 \Rightarrow y' = 3x^2.$$

b)

$$y = x^{6-4} = x^2 \Rightarrow y' = 2x.$$

c)

$$y = 3x^{4-1} = 3x^3 \Rightarrow y' = 9x^2.$$

Exo 15 15 – constante sur une racine

a)

$$y = 2x^{-1/2} \Rightarrow y' = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-3/2} = -x^{-3/2} = -\frac{1}{x\sqrt{x}}.$$

b)

$$y = x^{-1/3} \Rightarrow y' = -\frac{1}{3}x^{-4/3} = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}.$$

MOYEN 15 exercices

Exo 1 1 – règle du produit

On pose $U = x^2 + 1$ et $V = x - 3$, donc $U' = 2x$ et $V' = 1$.

$$y' = U'V + UV' = 2x(x - 3) + (x^2 + 1) \cdot 1 = 2x^2 - 6x + x^2 + 1 = 3x^2 - 6x + 1.$$

Exo 2 2 – produit avec racine

On pose $U = x$ et $V = \sqrt{x} = x^{1/2}$, donc $U' = 1$ et $V' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$y' = U'V + UV' = \sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

Vérification : $y = x \cdot x^{1/2} = x^{3/2} \Rightarrow y' = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$

Exo 3 3 – quotient affine

On pose $U = 2x - 1$ et $V = x + 3$, donc $U' = 2$ et $V' = 1$.

$$y' = \frac{U'V - UV'}{V^2} = \frac{2(x + 3) - (2x - 1) \cdot 1}{(x + 3)^2} = \frac{2x + 6 - 2x + 1}{(x + 3)^2} = \frac{7}{(x + 3)^2}.$$

Exo 4 4 – quotient avec carré

On pose $U = x^2$ et $V = x^2 + 1$, donc $U' = 2x$ et $V' = 2x$.

$$y' = \frac{U'V - UV'}{V^2} = \frac{2x(x^2 + 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

Exo 5 5 – quotient affine

On pose $U = x + 1$ et $V = x - 1$, donc $U' = 1$ et $V' = 1$.

$$y' = \frac{U'V - UV'}{V^2} = \frac{1 \cdot (x - 1) - (x + 1) \cdot 1}{(x - 1)^2} = \frac{x - 1 - x - 1}{(x - 1)^2} = \frac{-2}{(x - 1)^2}.$$

Exo 6 6 – règle du produit

On pose $U = 3x + 2$, $V = x^2 - x$, donc $U' = 3$, $V' = 2x - 1$.

a)

$$y' = U'V + UV' = 3(x^2 - x) + (3x + 2)(2x - 1) = 3x^2 - 3x + 6x^2 + x - 2 = 9x^2 - 2x - 2.$$

b)

$$y'(1) = 9 - 2 - 2 = 5.$$

Exo 7 7 – produit puissance et binôme

On pose $U = x^3$, $V = 2x - 5$, donc $U' = 3x^2$, $V' = 2$.

a)

$$y' = U'V + UV' = 3x^2(2x - 5) + x^3 \cdot 2 = 6x^3 - 15x^2 + 2x^3 = 8x^3 - 15x^2.$$

b)

$$\text{En développant : } y = 2x^4 - 5x^3, \text{ d'où } y' = 8x^3 - 15x^2.$$

Exo 8 8 – produit avec racine

On pose $U = x + 1$, $V = \sqrt{x} = x^{1/2}$, donc $U' = 1$, $V' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

a)

$$y' = U'V + UV' = \sqrt{x} + \frac{x+1}{2\sqrt{x}}.$$

b)

$$\text{Avec } \sqrt{x} = \frac{2x}{2\sqrt{x}} : y' = \frac{2x+x+1}{2\sqrt{x}} = \frac{3x+1}{2\sqrt{x}}.$$

Exo 9 9 – quotient polynôme sur affine

On pose $U = x^2 - 1$, $V = x + 2$, donc $U' = 2x$, $V' = 1$.

a)

$$y' = \frac{U'V - UV'}{V^2} = \frac{2x(x+2) - (x^2-1)}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}.$$

b)

$$y'(0) = \frac{1}{4}.$$

Exo 10 10 – quotient d'une constante

On pose $U = 3, V = x^2 + 1$, donc $U' = 0, V' = 2x$.

a)

$$y' = \frac{0 \cdot (x^2 + 1) - 3 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-6x}{(x^2 + 1)^2}.$$

b)

$$y' = 0 \iff -6x = 0 \iff x = 0.$$

Exo 11 11 – quotient et point d'annulation

On pose $U = 2x, V = x^2 + 1$, donc $U' = 2, V' = 2x$.

a)

$$y' = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

b)

$$y'(1) = \frac{2 - 2}{4} = 0.$$

Exo 12 12 – produit et pente de la tangente

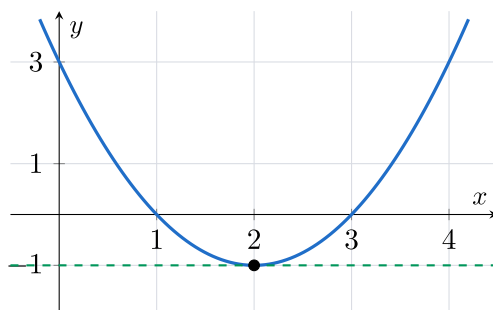
On pose $U = x - 1, V = x - 3$, donc $U' = 1, V' = 1$.

a)

$$f'(x) = U'V + UV' = (x - 3) + (x - 1) = 2x - 4.$$

b)

$f'(2) = 0$: la tangente au sommet $(2, -1)$ est *horizontale* (pente nulle).



Exo 13 13 – quotient affine et sens de variation

On pose $U = 5x + 2, V = x - 1$, donc $U' = 5, V' = 1$.

a)

$$y' = \frac{5(x-1)-(5x+2)}{(x-1)^2} = \frac{5x-5-5x-2}{(x-1)^2} = \frac{-7}{(x-1)^2}.$$

b)

Le numérateur $-7 < 0$ et $(x-1)^2 > 0$, donc $y' < 0$: y est strictement décroissante sur $] -\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

Exo 14 14 – règle du produit

On pose $U = x^2 + 3$, $V = 2x - 1$, donc $U' = 2x$, $V' = 2$.

a)

$$y' = U'V + UV' = 2x(2x - 1) + (x^2 + 3) \cdot 2 = 4x^2 - 2x + 2x^2 + 6 = 6x^2 - 2x + 6.$$

b)

En développant : $y = 2x^3 - x^2 + 6x - 3$, d'où $y' = 6x^2 - 2x + 6$.

Exo 15 15 – quotient à numérateur carré

On pose $U = x^2$, $V = 2x - 1$, donc $U' = 2x$, $V' = 2$.

a)

$$y' = \frac{2x(2x-1)-x^2 \cdot 2}{(2x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-2x^2}{(2x-1)^2} = \frac{-2x}{(2x-1)^2}.$$

b)

$$y'(1) = \frac{2 \cdot 1 \cdot 0}{1^2} = 0.$$

DIFFICILE 14 exercices

Exo 1 1 – produit avec racine et réduction

a) $U = x^2 - 1$ et $V = \sqrt{x} = x^{1/2}$, donc $U' = 2x$ et $V' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. b) Règle du produit :

$$y' = U'V + UV' = 2x\sqrt{x} + (x^2 - 1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2x\sqrt{x} + \frac{x^2 - 1}{2\sqrt{x}}.$$

c) On réduit au même dénominateur $2\sqrt{x}$, en écrivant $2x\sqrt{x} = \frac{2x\sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{4x^2}{2\sqrt{x}}$ (car $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$) :

$$y' = \frac{4x^2}{2\sqrt{x}} + \frac{x^2 - 1}{2\sqrt{x}} = \frac{4x^2 + x^2 - 1}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2 - 1}{2\sqrt{x}}.$$

Exo 2 2 – quotient avec développement

a) $U = x^2 + 2x$ et $V = x^2 + 1$, donc $U' = 2x + 2$ et $V' = 2x$. b) Règle du quotient :

$$y' = \frac{U'V - UV'}{V^2} = \frac{(2x+2)(x^2+1) - (x^2+2x)(2x)}{(x^2+1)^2}.$$

c) On développe le numérateur :

$$(2x+2)(x^2+1) = 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2, \quad (x^2+2x)(2x) = 2x^3 + 4x^2,$$

$$\text{numérateur} = 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2 - 2x^3 - 4x^2 = -2x^2 + 2x + 2,$$

d'où

$$y' = \frac{-2x^2 + 2x + 2}{(x^2+1)^2}.$$

Exo 3 3 – quotient affine à simplifier

a)

$U = 3x - 2$ et $V = 2x + 1$, donc $U' = 3$ et $V' = 2$:

$$y' = \frac{U'V - UV'}{V^2} = \frac{3(2x+1) - (3x-2) \cdot 2}{(2x+1)^2}.$$

b)

On simplifie le numérateur :

$$3(2x+1) - 2(3x-2) = 6x + 3 - 6x + 4 = 7, \quad \text{donc} \quad y' = \frac{7}{(2x+1)^2}.$$

Exo 4 4 – produit vs développement

a)

Par le produit : $U = x$ et $V = x^2 - 4$, donc $U' = 1$ et $V' = 2x$:

$$y' = U'V + UV' = (x^2 - 4) + x \cdot 2x = x^2 - 4 + 2x^2 = 3x^2 - 4.$$

b)

Après développement : $y = x(x^2 - 4) = x^3 - 4x$, donc

$$y' = 3x^2 - 4.$$

c)

Les deux méthodes donnent le même résultat $3x^2 - 4$: cohérence confirmée.

Exo 5 5 – produit de trois facteurs

a)

$U = x(x - 1) = x^2 - x$ (donc $U' = 2x - 1$) et $V = x + 2$ (donc $V' = 1$) :

$$y' = U'V + UV' = (2x - 1)(x + 2) + (x^2 - x) = 2x^2 + 3x - 2 + x^2 - x = 3x^2 + 2x - 2.$$

b)

$y = x(x - 1)(x + 2) = x(x^2 + x - 2) = x^3 + x^2 - 2x$, d'où $y' = 3x^2 + 2x - 2$.

c)

Avec $U = x$, $V = x - 1$, $W = x + 2$:

$$(UVW)' = U'VW + UV'W + UVW' = (x - 1)(x + 2) + x(x + 2) + x(x - 1) = 3x^2 + 2x - 2.$$

Exo 6 6 – quotient à numérateur factorisé

a)

$x(x + 1) = x^2 + x$, donc $U = x^2 + x$ et $V = x - 1$, avec $U' = 2x + 1$, $V' = 1$.

b)

$$y' = \frac{(2x + 1)(x - 1) - (x^2 + x)}{(x - 1)^2} = \frac{2x^2 - x - 1 - x^2 - x}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}.$$

c)

$$y'(0) = \frac{-1}{(-1)^2} = -1.$$

Exo 7 7 – quotient avec une racine

a)

$U = \sqrt{x} = x^{1/2}$ (donc $U' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$) et $V = x + 1$ (donc $V' = 1$).

b)

$$y' = \frac{U'V - UV'}{V^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - \sqrt{x}}{(x+1)^2}.$$

c)

Au numérateur, avec $\sqrt{x} = \frac{2x}{2\sqrt{x}}$:

$$\frac{x+1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \frac{x+1-2x}{2\sqrt{x}} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}}, \quad \text{donc} \quad y' = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}.$$

Exo 8 8 – dérivée et tangente à l'origine

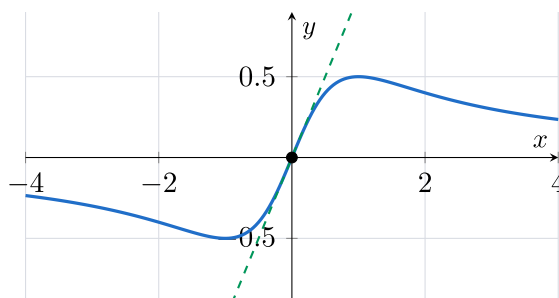
a)

$U = x, V = x^2 + 1$, donc $U' = 1, V' = 2x$:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

b)

$f'(0) = \frac{1}{1} = 1$ et $f(0) = 0$: la tangente en O a pour équation $y = x$.



Exo 9 9 – produit contre réécriture

a)

$U = x^2, V = \sqrt{x}$, donc $U' = 2x, V' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$:

$$y' = U'V + UV' = 2x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{4x^2}{2\sqrt{x}} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2}x^{3/2},$$

car $2x\sqrt{x} = \frac{4x^2}{2\sqrt{x}}$ (puisque $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$).

b)

$$y = x^{5/2} \Rightarrow y' = \frac{5}{2}x^{3/2}.$$

c)

Les deux voies donnent $\frac{5}{2}x^{3/2}$.

Exo 10 10 – quotient et signe de la dérivée

a)

$U = x^2 - 1, V = x^2 + 1$, donc $U' = 2x, V' = 2x$:

$$y' = \frac{2x(x^2 + 1) - (x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

b)

Numérateur : $2x^3 + 2x - 2x^3 + 2x = 4x$, donc $y' = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$.

c)

$(x^2 + 1)^2 > 0$, donc y' a le signe de x : y décroît sur $] -\infty, 0]$ et croît sur $[0, +\infty[$ (minimum en $x = 0$).

Exo 11 11 – quotient contre puissances négatives

a)

$U = x + 1, V = x^2$, donc $U' = 1, V' = 2x$:

$$y' = \frac{1 \cdot x^2 - (x + 1) \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{x^2 - 2x^2 - 2x}{x^4} = \frac{-x^2 - 2x}{x^4} = -\frac{x + 2}{x^3}.$$

b)

$y = x^{-1} + x^{-2} \Rightarrow y' = -x^{-2} - 2x^{-3} = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} = -\frac{x+2}{x^3}$.

c)

Les deux méthodes donnent $-\frac{x+2}{x^3}$.

Exo 12 12 – quotient de degré supérieur

a)

$U = x^3, V = x^2 + 1$, donc $U' = 3x^2, V' = 2x$:

$$y' = \frac{3x^2(x^2 + 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

b)

Numérateur : $3x^4 + 3x^2 - 2x^4 = x^4 + 3x^2$, donc $y' = \frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}$.

c)

$x^4 + 3x^2 = x^2(x^2 + 3) \geq 0$, donc $y' \geq 0$: f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exo 13 13 – vitesse instantanée

a)

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 12t + 9.$$

b)

$$v = 0 \iff 3(t^2 - 4t + 3) = 0 \iff (t - 1)(t - 3) = 0 \iff t = 1 \text{ ou } t = 3.$$

c)

À $t = 1$ et $t = 3$ la vitesse s'annule : le mobile s'arrête et change de sens. Ce sont les sommets de la courbe (maximum local en $t = 1$, minimum local en $t = 3$).

Exo 14 14 – synthèse : dérivée, extremums, tangente

a)

$$U = 3x, V = x^2 + 1, \text{ donc } U' = 3, V' = 2x :$$

$$f'(x) = \frac{3(x^2 + 1) - 3x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3 - 3x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}.$$

b)

$$f'(x) = 0 \iff 1 - x^2 = 0 \iff x = -1 \text{ ou } x = 1.$$

c)

$f(0) = 0$ et $f'(0) = 3$: la tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 3x$.



Tous les exos cochés ? Passe au niveau réel.



Ce carnet est un extrait de notre bibliothèque d'entraînement — la suite se joue en ligne.

Sur simulationconcours.be

- ✓ Le même carnet en interactif, avec correction en un clic
- ✓ Les autres mécaniques de la fiche, niveau par niveau
- ✓ 3100 QCM type concours, corrigés et expliqués
- ✓ Les cours complets — gratuits — et les fiches de révision

Tous les jeudis : simulation du concours en ligne

En conditions réelles — chrono, QCM type concours et score immédiat.



Rejoins-nous sur simulationconcours.be

scanne le QR ou tape l'adresse — les cours complets sont gratuits