



simulationconcours.be

Mathématiques

Carnet d'entraînement

Nombre derive taux accroissement

Dérivation · Mécanique 1 — des exercices calibrés concours, du plus simple au plus retors.

44 exercices

3 niveaux

corrigés détaillés

Comment bosser ce carnet

- ✓ Lis d'abord le tutoriel : la mécanique y est expliquée pas à pas
- ✓ Fais chaque niveau en entier **avant** d'ouvrir les corrigés
- ✓ Note à côté de chaque exo : réussi, hésité ou raté — et rejoue les ratés 48 h plus tard



simulationconcours.be

scanne & continue en ligne

Sommaire

- 1 Le tutoriel — la mécanique expliquée
- 2 Les exercices Facile x15 · Moyen x15 · Difficile x14
- 3 Les corrigés détaillés exercice par exercice

Le tutoriel

Ce document est un **carnet d'exercices** : on t'explique d'abord la mécanique, puis tu la travailles sur 44 exercices classés en trois niveaux. Les corrigés détaillés t'attendent en deuxième partie, après la page « Corrigés » — pas avant de l'avoir mérité.

*1. Le taux d'accroissement : une variation moyenne

Soit f une fonction et x_0 un point de son domaine. Quand on part de x_0 et qu'on avance d'un petit pas h (avec $h \neq 0$), la fonction passe de $f(x_0)$ à $f(x_0 + h)$. Le **taux d'accroissement** de f entre x_0 et $x_0 + h$ mesure la variation *moyenne* de f sur cet intervalle :

$$\tau(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\text{variation de la fonction}}{\text{variation de la variable}}.$$

À RETENIR trois lectures d'un même nombre

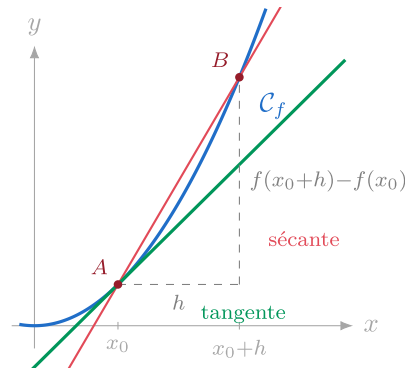
Le taux d'accroissement $\tau(h)$ se lit de trois façons équivalentes :

- **Variation moyenne** de f entre x_0 et $x_0 + h$;
- **Pente de la sécante** passant par les points $A(x_0; f(x_0))$ et $B(x_0 + h; f(x_0 + h))$;
- **Vitesse moyenne** si $f(x)$ représente une position au temps x .

*2. Passage à la limite : le nombre dérivé

Faisons maintenant tendre le pas h vers 0 : le point B glisse le long de la courbe et se rapproche de A . La sécante (AB) pivote et tend vers une position limite : la **tangente** à la courbe au point A . La pente de cette tangente est le **nombre dérivé** de f en x_0 :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



Quand $h \rightarrow 0$: la sécante (rouge) bascule vers la tangente (verte), et la variation moyenne $\tau(h)$ devient la **variation instantanée** $f'(x_0)$.

À RETENIR du moyen à l'instantané

$f'(x_0)$ est à la fois la **pente de la tangente** en A , la **variation instantanée** de f en x_0 , et la **vitesse instantanée** à l'instant x_0 si f est une position.

MÉTHODE calculer $f'(x_0)$ par la définition, en 4 étapes

- 1 **Écrire** le taux d'accroissement $\tau(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.
- 2 **Développer et simplifier le numérateur** $f(x_0 + h) - f(x_0)$ (le terme constant $f(x_0)$ doit disparaître, laissant h en facteur).
- 3 **Simplifier par h** (on a le droit car $h \neq 0$).
- 4 **Faire tendre $h \rightarrow 0$** : la limite obtenue est $f'(x_0)$.

EXEMPLE la fonction carré $f(x) = x^2$

Étape 1. $\tau(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h}$. **Étape 2.** On développe le numérateur :

$$(x_0 + h)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2 = 2x_0h + h^2 = h(2x_0 + h).$$

Étape 3. On simplifie par h (licite car $h \neq 0$) : $\tau(h) = \frac{h(2x_0 + h)}{h} = 2x_0 + h$. **Étape 4.** On passe à la limite :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 + h) = 2x_0.$$

Ainsi la pente de la tangente à la parabole au point d'abscisse x_0 vaut $2x_0$.

⚠ PIÈGE

On ne remplace *jamais* h par 0 dès l'étape 1 : on obtiendrait $\frac{0}{0}$, forme indéterminée. Il faut d'abord **simplifier par h** au numérateur, *puis* seulement faire $h \rightarrow 0$.

Les exercices

FACILE 15 exercices

Exo 1 1

Soit $f(x) = x^2$. Calculer le taux d'accroissement $\tau(h)$ entre $x_0 = 2$ et $2 + h$, puis simplifier le résultat.

Exo 2 2

Soit $f(x) = 3x + 1$. Calculer le taux d'accroissement $\tau(h)$ en un point x_0 quelconque. Que remarque-t-on ?

Exo 3 3

Soit $f(x) = x^2 - x$. Calculer le taux d'accroissement entre $x_0 = 1$ et $1 + h$, puis simplifier.

Exo 4 4

Un mobile se déplace : sa position (en mètres) au temps x (en secondes) est donnée par $y = f(x) = x^2$. Calculer sa **vitesse moyenne** entre les instants $t = 2$ s et $t = 5$ s.

Exo 5 5

On considère deux points d'une courbe : $A(1 ; 2)$ et $B(4 ; 8)$. Calculer la **pente de la sécante** (AB) .

Exo 6 6

Soit $f(x) = x^2 + 1$. Calculer le taux d'accroissement $\tau(h)$ entre $x_0 = 3$ et $3 + h$, puis simplifier.

Exo 7 7

Soit $f(x) = x^2 - 2x$. Calculer la **variation moyenne** de f entre $a = 0$ et $b = 3$.

Exo 8 8

Soit $f(x) = -2x + 5$. Calculer le taux d'accroissement $\tau(h)$ en un point x_0 quelconque. Que constate-t-on, et pourquoi ?

Exo 9 9

On donne deux points d'une courbe : $A(-1 ; 3)$ et $B(2 ; -3)$. Calculer la **pente de la sécante** (AB) .

Exo 10 10

La position (en mètres) d'un mobile au temps x (en secondes) est $y = f(x) = x^2 + x$. Calculer sa **vitesse moyenne** entre les instants $t = 1$ s et $t = 4$ s.

Exo 11 11

Soit $f(x) = x^2$. Calculer le taux d'accroissement $\tau(h)$ entre $x_0 = -1$ et $-1 + h$, puis simplifier.

Exo 12 12

Soit $f(x) = x^2$ étudiée au point $x_0 = 1$.

a)

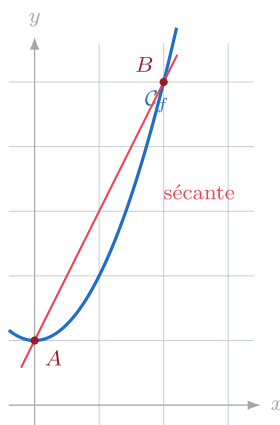
Montrer que le taux d'accroissement entre 1 et $1 + h$ vaut $\tau(h) = 2 + h$.

b)

Calculer $\tau(0,1)$ et $\tau(0,01)$; vers quelle valeur $\tau(h)$ semble-t-il se rapprocher quand h devient très petit ?

Exo 13 13

La courbe $\mathcal{C}_f$ ci-dessous passe par les points A et B à coordonnées entières. Lire leurs coordonnées, puis en déduire la **pente de la sécante** (AB) .



Exo 14 14

Soit $f(x) = 10 - x^2$. Calculer la variation moyenne de f entre $a = 1$ et $b = 3$. Quel est le signe du résultat, et que traduit-il sur f ?

Exo 15 15

Soit $f(x) = x^2 + 2$.

a)

Calculer le taux d'accroissement $\tau(h)$ entre $x_0 = 1$ et $1 + h$, puis simplifier.

b)

En déduire la pente de la sécante joignant les points d'abscisses 1 et 2.

MOYEN 15 exercices

Exo 1 1

Soit $f(x) = x^2$. Montrer, **par la définition** (passage à la limite), que $f'(x_0) = 2x_0$.

Exo 2 2

Soit $f(x) = x^2 + 3x$. Calculer $f'(x_0)$ par la définition.

Exo 3 3

Soit $f(x) = x^3$. Calculer $f'(x_0)$ par la définition. *Indication* : développer $(x_0 + h)^3 = x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3$.

Exo 4 4

Soit $f(x) = \frac{1}{x}$ (avec $x_0 \neq 0$). Calculer $f'(x_0)$ par la définition.

Exo 5 5

Un mobile en mouvement rectiligne uniformément accéléré a pour position $y = f(x) = 2x^2$ (en mètres, x en secondes). Calculer la **vitesse instantanée** $f'(x_0)$ par la définition, puis en déduire la vitesse à l'instant $t = 3$ s.

Exo 6 6

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

a)

Calculer $f'(x_0)$ par la définition.

b)

En déduire $f'(1)$.

Exo 7 7

Soit $f(x) = 5x^2$. Calculer $f'(x_0)$ par la définition.

Exo 8 8

Soit $f(x) = x^2$. Calculer directement le nombre dérivé $f'(3)$ **par la définition** (sans utiliser de formule toute faite).

Exo 9 9

Soit $f(x) = \frac{2}{x}$ (avec $x_0 \neq 0$). Calculer $f'(x_0)$ par la définition.

Exo 10 10

Soit $f(x) = x^3 - x$. Calculer $f'(x_0)$ par la définition. *Indication:* $(x_0 + h)^3 = x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3$.

Exo 11 11

Soit $f(x) = -x^2 + 6x$.

a)

Calculer $f'(x_0)$ par la définition.

b)

Pour quelle abscisse x_0 le nombre dérivé est-il nul ? Interpréter.

Exo 12 12

La position (en mètres) d'un mobile au temps x (en secondes) est $y = f(x) = 3x^2 + x$.

a)

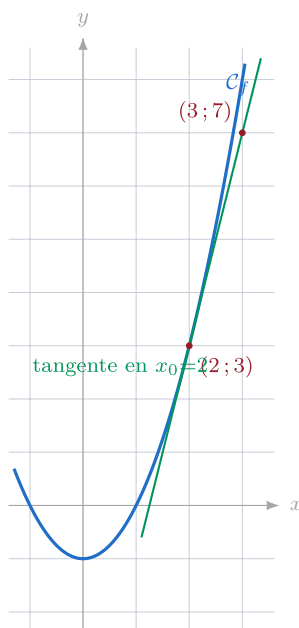
Calculer la **vitesse instantanée** $f'(x_0)$ par la définition.

b)

En déduire la vitesse à l'instant $t = 2$ s.

Exo 13 13

La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x_0 = 2$ est tracée ci-dessous. En lisant deux points à coordonnées entières de cette tangente, déterminer le nombre dérivé $f'(2)$.



Exo 14 14

Soit $f(x) = ax^2$, où a est une constante. Montrer, **par la définition**, que $f'(x_0) = 2ax_0$.

Exo 15 15

Soit $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$.

a)

Calculer $f'(x_0)$ par la définition.

b)

Calculer $f'(0)$ et interpréter son signe géométriquement.

DIFFICILE 14 exercices**Exo 1** 1 – fonction racine

Soit $f(x) = \sqrt{x}$ avec $x_0 > 0$.

- 1 Écrire le taux d'accroissement $\tau(h)$.
- 2 Multiplier numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée $\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}$.
- 3 En déduire $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$.
- 4 Calculer $f'(4)$.

Exo 2 2 – mobile MRUA

Un mobile a pour position $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$ (vitesse initiale 2 m/s, accélération 1 m/s²).

- 1 Écrire le taux d'accroissement $\tau(h)$.
- 2 Développer et simplifier.
- 3 En déduire $f'(x_0) = x_0 + 2$.
- 4 Calculer la vitesse instantanée à l'instant $t = 3$ s.

Exo 3 3 – fonction homographique

Soit $f(x) = \frac{1}{x+1}$ avec $x_0 \neq -1$.

- 1 Écrire le taux d'accroissement $\tau(h)$.
- 2 Réduire le numérateur au même dénominateur.
- 3 En déduire $f'(x_0) = -\frac{1}{(x_0 + 1)^2}$.

Exo 4 4 – valeur absolue, point anguleux

Soit $f(x) = |x|$ que l'on étudie en $x_0 = 0$.

- 1 Calculer le taux d'accroissement $\tau(h) = \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ d'abord pour $h > 0$, puis pour $h < 0$.
- 2 Que valent les limites de $\tau(h)$ à droite ($h \rightarrow 0^+$) et à gauche ($h \rightarrow 0^-$) ?
- 3 Conclure : f est-elle dérivable en 0 ? Interpréter géométriquement.

Exo 5 5 – racine décalée

Soit $f(x) = \sqrt{x+3}$ avec $x_0 > -3$.

a)

Écrire le taux d'accroissement $\tau(h)$.

b)

Multiplier par la quantité conjuguée $\sqrt{x_0+h+3} + \sqrt{x_0+3}$.

c)

En déduire $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0+3}}$.

d)

Calculer $f'(1)$.

Exo 6 6 – inverse d'une racine

Soit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ avec $x_0 > 0$.

a)

Écrire le taux d'accroissement $\tau(h)$ et réduire les deux fractions au même dénominateur.

b)

Faire apparaître la quantité conjuguée $\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0+h}$ pour lever l'indétermination.

c)

En déduire $f'(x_0) = -\frac{1}{2x_0\sqrt{x_0}}$.

Exo 7 7 – raccord de deux morceaux

Soit f définie par $f(x) = x^2$ si $x \leq 1$ et $f(x) = 2x - 1$ si $x > 1$. On étudie la dérivabilité en $x_0 = 1$.

a)

Vérifier que f est continue en 1.

b)

Calculer la limite de $\tau(h)$ pour $h < 0$ (dérivée à gauche).

c)

Calculer la limite de $\tau(h)$ pour $h > 0$ (dérivée à droite).

d)

Conclure : f est-elle dérivable en 1 ? Si oui, donner $f'(1)$.

Exo 8 8 – tangente verticale

Soit $f(x) = \sqrt{x}$ que l'on étudie en $x_0 = 0$.

a)

Écrire le taux d'accroissement $\tau(h)$ pour $h > 0$ et le simplifier.

b)

Déterminer la limite de $\tau(h)$ quand $h \rightarrow 0^+$.

c)

f est-elle dérivable en 0 ? Interpréter géométriquement.

Exo 9 9 – déterminer deux paramètres

Soit f définie par $f(x) = x^2 + 1$ si $x \leq 2$ et $f(x) = ax + b$ si $x > 2$. On cherche a et b pour que f soit **dérivable** en $x_0 = 2$.

a)

Écrire la condition de **continuité** en 2.

b)

Calculer la dérivée à gauche $f'(2^-)$ par la définition.

c)

En déduire la valeur de a .

d)

En déduire alors la valeur de b .

Exo 10 10 – fonction homographique

Soit $f(x) = \frac{x}{x+1}$ avec $x_0 \neq -1$.

a)

Écrire le taux d'accroissement $\tau(h)$.

b)

Réduire au même dénominateur et simplifier par h .

c)

En déduire $f'(x_0) = \frac{1}{(x_0 + 1)^2}$.

Exo 11 11 – dérivable malgré un changement de forme

Soit $f(x) = x|x|$ que l'on étudie en $x_0 = 0$.

a)

Montrer que $\tau(h) = \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = |h|$.

b)

Déterminer les limites de $\tau(h)$ à droite et à gauche de 0.

c)

Conclure : f est-elle dérivable en 0 ? Si oui, donner $f'(0)$.

Exo 12 12 – racine d'une fonction affine

Soit $f(x) = \sqrt{2x+1}$ avec $x_0 > -\frac{1}{2}$.

a)

Écrire le taux d'accroissement $\tau(h)$.

b)

Multiplier par la quantité conjuguée.

c)

En déduire $f'(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2x_0+1}}$.

Exo 13 13 – projectile

La hauteur (en mètres) d'un projectile au temps x (en secondes) est $y = f(x) = -5x^2 + 20x$.

a)

Calculer la vitesse instantanée $f'(x_0)$ par la définition.

b)

À quel instant la vitesse s'annule-t-elle ?

c)

En déduire la hauteur maximale atteinte.

Exo 14 14 – inverse d'un carré

Soit $f(x) = \frac{1}{x^2}$ avec $x_0 \neq 0$.

a)

Écrire le taux d'accroissement $\tau(h)$.

b)

Réduire au même dénominateur et simplifier par h .

c)

En déduire $f'(x_0) = -\frac{2}{x_0^3}$.



DEUXIÈME PARTIE

Corrigés

Chaque exercice repris pas à pas, niveau par niveau.
Compare ta démarche, pas seulement ton résultat.





Une seconde – avant d'ouvrir le corrigé...



Si ce carnet t'aide, rends-nous la pareille : parle de simulationconcours.be à quelqu'un qui prépare le concours. C'est comme ça qu'on peut continuer.

Ce qu'on a préparé pour toi

- ✓ Ce carnet en interactif, avec correction en un clic
- ✓ Les cours complets, chapitre par chapitre – gratuits
- ✓ 3100 QCM type concours, corrigés et expliqués
- ✓ Des fiches de révision à imprimer

Tous les jeudis : simulation du concours en ligne

En conditions réelles – chrono, QCM type concours et score immédiat.



Rejoins-nous sur simulationconcours.be

scanne le QR ou tape l'adresse – puis reviens vérifier tes réponses

Les corrigés

FACILE 15 exercices

Exo 1 1

On applique la définition avec $x_0 = 2$:

$$\tau(h) = \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h}.$$

On développe le numérateur : $(2+h)^2 - 4 = 4 + 4h + h^2 - 4 = 4h + h^2 = h(4+h)$. D'où

$$\tau(h) = \frac{h(4+h)}{h} = \boxed{4+h} \quad (h \neq 0).$$

Exo 2 2

$$\tau(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{(3(x_0+h) + 1) - (3x_0 + 1)}{h}.$$

Le numérateur vaut $3x_0 + 3h + 1 - 3x_0 - 1 = 3h$, donc

$$\tau(h) = \frac{3h}{h} = \boxed{3}.$$

Le taux est **constant**, égal à 3 : c'est normal, la courbe est une droite de pente 3, toutes ses sécantes ont la même pente.

Exo 3 3

$$\tau(h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{[(1+h)^2 - (1+h)] - [1^2 - 1]}{h}.$$

Or $f(1) = 1 - 1 = 0$ et $(1+h)^2 - (1+h) = 1 + 2h + h^2 - 1 - h = h + h^2 = h(1+h)$. Donc

$$\tau(h) = \frac{h(1+h)}{h} = \boxed{1+h} \quad (h \neq 0).$$

Exo 4 4

La vitesse moyenne entre $t = 2$ s et $t = 5$ s est le taux d'accroissement entre ces deux instants :

$$v_{\text{moy}} = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{5^2 - 2^2}{3} = \frac{25 - 4}{3} = \frac{21}{3} = \boxed{7 \text{ m/s}}.$$

Exo 5 5

La pente de la droite passant par $A(1; 2)$ et $B(4; 8)$ est le rapport de la variation des ordonnées sur celle des abscisses :

$$\text{pente} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{8 - 2}{4 - 1} = \frac{6}{3} = \boxed{2}.$$

Exo 6 6

$$\tau(h) = \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{[(3+h)^2 + 1] - [3^2 + 1]}{h}.$$

Le numérateur vaut $(9 + 6h + h^2 + 1) - 10 = 6h + h^2 = h(6 + h)$, donc

$$\tau(h) = \frac{h(6+h)}{h} = \boxed{6+h} \quad (h \neq 0).$$

Exo 7 7

Avec $f(0) = 0$ et $f(3) = 9 - 6 = 3$:

$$\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{3 - 0}{3} = \boxed{1}.$$

Exo 8 8

$$\tau(h) = \frac{(-2(x_0 + h) + 5) - (-2x_0 + 5)}{h} = \frac{-2h}{h} = \boxed{-2}.$$

Le taux est **constant**, égal à -2 : la courbe est une droite de pente -2 (décroissante), toutes ses sécantes ont la même pente.

Exo 9 9

$$\text{pente} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-3 - 3}{2 - (-1)} = \frac{-6}{3} = \boxed{-2}.$$

Exo 10 10

Avec $f(1) = 1 + 1 = 2$ et $f(4) = 16 + 4 = 20$:

$$v_{\text{moy}} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{20 - 2}{3} = \frac{18}{3} = \boxed{6 \text{ m/s}}.$$

Exo 11 11

$$\tau(h) = \frac{(-1 + h)^2 - (-1)^2}{h} = \frac{(1 - 2h + h^2) - 1}{h} = \frac{-2h + h^2}{h} = \boxed{-2 + h} \quad (h \neq 0).$$

Exo 12 12

a)

$$\tau(h) = \frac{(1 + h)^2 - 1^2}{h} = \frac{2h + h^2}{h} = \boxed{2 + h}.$$

b)

$\tau(0,1) = 2,1$ et $\tau(0,01) = 2,01$. Quand h devient très petit, $\tau(h) = 2 + h$ se rapproche de $\boxed{2}$: c'est la pente de la tangente en 1.

Exo 13 13

On lit $A(0 ; 1)$ et $B(2 ; 5)$. La pente de la sécante (AB) est

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - 1}{2 - 0} = \frac{4}{2} = \boxed{2}.$$

Exo 14 14

Avec $f(1) = 9$ et $f(3) = 1$:

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{1 - 9}{2} = \frac{-8}{2} = \boxed{-4}.$$

Le résultat est **négligable** : en moyenne, f **décroît** sur $[1 ; 3]$.

Exo 15 15

a)

$$\tau(h) = \frac{[(1 + h)^2 + 2] - [1^2 + 2]}{h} = \frac{2h + h^2}{h} = \boxed{2 + h}.$$

b)

La sécante entre les abscisses 1 et 2 correspond à $h = 1$, donc sa pente vaut $\tau(1) = 2 + 1 = \boxed{3}$.

MOYEN

15 exercices

Exo 1 1

Taux d'accroissement : $\tau(h) = \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h}$. **Numérateur :** $(x_0 + h)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2 = 2x_0h + h^2 = h(2x_0 + h)$. **Simplification par h :** $\tau(h) = \frac{h(2x_0 + h)}{h} = 2x_0 + h$. **Limite :** $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 + h) = \boxed{2x_0}$. $\square$

Exo 2 2

$$\tau(h) = \frac{[(x_0 + h)^2 + 3(x_0 + h)] - [x_0^2 + 3x_0]}{h}.$$

Numérateur: $x_0^2 + 2x_0h + h^2 + 3x_0 + 3h - x_0^2 - 3x_0 = 2x_0h + h^2 + 3h = h(2x_0 + h + 3)$. Donc

$$\tau(h) = 2x_0 + h + 3 \xrightarrow{h \rightarrow 0} \boxed{2x_0 + 3}.$$

Exo 3 3

$$\tau(h) = \frac{(x_0 + h)^3 - x_0^3}{h}.$$

On développe: $(x_0 + h)^3 = x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3$, donc le numérateur vaut

$$3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3 = h(3x_0^2 + 3x_0h + h^2).$$

D'où $\tau(h) = 3x_0^2 + 3x_0h + h^2$, et en faisant $h \rightarrow 0$:

$$f'(x_0) = \boxed{3x_0^2}.$$

Exo 4 4

$$\tau(h) = \frac{\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}}{h}.$$

On réduit le numérateur au même dénominateur $x_0(x_0 + h)$:

$$\frac{1}{x_0 + h} - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0 - (x_0 + h)}{x_0(x_0 + h)} = \frac{-h}{x_0(x_0 + h)}.$$

Donc

$$\tau(h) = \frac{1}{h} \cdot \frac{-h}{x_0(x_0 + h)} = \frac{-1}{x_0(x_0 + h)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x_0 \cdot x_0} = \boxed{-\frac{1}{x_0^2}}.$$

Exo 5 5

Vitesse instantanée par la définition :

$$\tau(h) = \frac{2(x_0 + h)^2 - 2x_0^2}{h} = \frac{2(x_0^2 + 2x_0h + h^2) - 2x_0^2}{h} = \frac{4x_0h + 2h^2}{h} = 4x_0 + 2h.$$

En faisant $h \rightarrow 0$: $f'(x_0) = \boxed{4x_0}$. **À l'instant $t = 3$ s :** $f'(3) = 4 \times 3 = \boxed{12\text{m/s}}$.

Exo 6 6

a)

Numérateur du taux : $[(x_0 + h)^2 - 4(x_0 + h) + 1] - [x_0^2 - 4x_0 + 1] = 2x_0h + h^2 - 4h = h(2x_0 + h - 4)$. D'où $\tau(h) = 2x_0 + h - 4 \xrightarrow{h \rightarrow 0} \boxed{2x_0 - 4}$.

b)

$$f'(1) = 2 \times 1 - 4 = \boxed{-2}.$$

Exo 7 7

$$\tau(h) = \frac{5(x_0 + h)^2 - 5x_0^2}{h} = \frac{5(2x_0h + h^2)}{h} = 5(2x_0 + h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \boxed{10x_0}.$$

Exo 8 8

$$\tau(h) = \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \frac{(3 + h)^2 - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h \xrightarrow{h \rightarrow 0} \boxed{f'(3) = 6}.$$

Exo 9 9

$$\tau(h) = \frac{1}{h} \left(\frac{2}{x_0 + h} - \frac{2}{x_0} \right) = \frac{1}{h} \cdot \frac{2x_0 - 2(x_0 + h)}{x_0(x_0 + h)} = \frac{1}{h} \cdot \frac{-2h}{x_0(x_0 + h)} = \frac{-2}{x_0(x_0 + h)}.$$

En faisant $h \rightarrow 0$: $f'(x_0) = \boxed{-\frac{2}{x_0^2}}$.

Exo 10 10

Le numérateur du taux vaut

$$[(x_0 + h)^3 - (x_0 + h)] - [x_0^3 - x_0] = 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3 - h = h(3x_0^2 + 3x_0h + h^2 - 1).$$

Donc $\tau(h) = 3x_0^2 + 3x_0h + h^2 - 1 \xrightarrow{h \rightarrow 0} \boxed{3x_0^2 - 1}$.

Exo 11 11

a)

Numérateur : $-(x_0 + h)^2 - x_0^2 + 6h = -(2x_0h + h^2) + 6h = h(-2x_0 - h + 6)$. D'où $\tau(h) = -2x_0 - h + 6 \xrightarrow{h \rightarrow 0} \boxed{-2x_0 + 6}$.

b)

$f'(x_0) = 0 \iff -2x_0 + 6 = 0 \iff \boxed{x_0 = 3}$. En ce point la tangente est **horizontale** : c'est le sommet de la parabole.

Exo 12 12

a)

$$\tau(h) = \frac{[3(x_0 + h)^2 + (x_0 + h)] - [3x_0^2 + x_0]}{h} = \frac{6x_0h + 3h^2 + h}{h} = 6x_0 + 3h + 1, \text{ donc } f'(x_0) = \boxed{6x_0 + 1}.$$

b)

$$f'(2) = 6 \times 2 + 1 = \boxed{13\text{m/s}}.$$

Exo 13 13

On lit deux points entiers de la tangente : (2 ; 3) et (3 ; 7). Le nombre dérivé $f'(2)$ est la pente de cette tangente :

$$f'(2) = \frac{7 - 3}{3 - 2} = \frac{4}{1} = \boxed{4}.$$

Exo 14 14

$$\tau(h) = \frac{a(x_0 + h)^2 - ax_0^2}{h} = \frac{a(2x_0h + h^2)}{h} = a(2x_0 + h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \boxed{2ax_0}. \quad \square$$

Exo 15 15

a)

Numérateur: $2[(x_0 + h)^2 - x_0^2] - 3h = 2(2x_0h + h^2) - 3h = h(4x_0 + 2h - 3)$. D'où $\tau(h) = 4x_0 + 2h - 3 \xrightarrow{h \rightarrow 0} \boxed{4x_0 - 3}$.

b)

$f'(0) = -3 < 0$: la tangente en $x = 0$ a une **pente négative**, donc f est décroissante au voisinage de 0.

DIFFICILE 14 exercices

Exo 1 1 – fonction racine

a) $\tau(h) = \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h}$. b) On multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué $\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}$:

$$\tau(h) = \frac{(\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})}{h(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} = \frac{(x_0 + h) - x_0}{h(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})}.$$

Le numérateur se simplifie en h :

$$\tau(h) = \frac{h}{h(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}}.$$

c) On fait $h \rightarrow 0$; comme $\sqrt{x_0 + h} \rightarrow \sqrt{x_0}$:

$$f'(x_0) = \frac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x_0}}}.$$

$$d) f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2 \times 2} = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

Exo 2 2 – mobile MRUA

a) $\tau(h) = \frac{[\frac{1}{2}(x_0 + h)^2 + 2(x_0 + h)] - [\frac{1}{2}x_0^2 + 2x_0]}{h}$. b) On développe le numérateur :

$$\frac{1}{2}(x_0^2 + 2x_0h + h^2) + 2x_0 + 2h - \frac{1}{2}x_0^2 - 2x_0 = x_0h + \frac{1}{2}h^2 + 2h = h\left(x_0 + \frac{1}{2}h + 2\right).$$

Après simplification par h : $\tau(h) = x_0 + \frac{1}{2}h + 2$. **c)** En faisant $h \rightarrow 0$: $f'(x_0) = \boxed{x_0 + 2}$. **d)** À $t = 3$ s : $f'(3) = 3 + 2 = \boxed{5\text{m/s}}$.

Exo 3 3 – fonction homographique

a) $\tau(h) = \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x_0 + h + 1} - \frac{1}{x_0 + 1} \right)$. **b)** On réduit au même dénominateur $(x_0 + h + 1)(x_0 + 1)$:

$$\frac{1}{x_0 + h + 1} - \frac{1}{x_0 + 1} = \frac{(x_0 + 1) - (x_0 + h + 1)}{(x_0 + h + 1)(x_0 + 1)} = \frac{-h}{(x_0 + h + 1)(x_0 + 1)}.$$

Donc

$$\tau(h) = \frac{1}{h} \cdot \frac{-h}{(x_0 + h + 1)(x_0 + 1)} = \frac{-1}{(x_0 + h + 1)(x_0 + 1)}.$$

c) En faisant $h \rightarrow 0$ (alors $x_0 + h + 1 \rightarrow x_0 + 1$) :

$$f'(x_0) = \frac{-1}{(x_0 + 1)(x_0 + 1)} = \boxed{-\frac{1}{(x_0 + 1)^2}}.$$

Exo 4 4 – valeur absolue, point anguleux

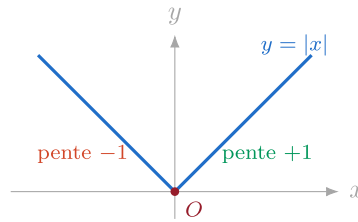
Ici $f(0) = 0$, donc $\tau(h) = \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h}$. **a)** Selon le signe de h :

- si $h > 0$: $|h| = h$, donc $\tau(h) = \frac{h}{h} = 1$;
- si $h < 0$: $|h| = -h$, donc $\tau(h) = \frac{-h}{h} = -1$.

b) Les limites latérales sont donc

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \tau(h) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \tau(h) = -1.$$

c) Les deux limites latérales existent mais sont **différentes** ($1 \neq -1$) : la limite $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h)$ n'existe pas. Par conséquent f **n'est pas dérivable en 0**. Géométriquement, la courbe présente en O un **point anguleux** : elle admet une demi-tangente de pente 1 à droite et une demi-tangente de pente -1 à gauche, sans tangente unique.



Exo 5 5 – racine décalée

a)

$$\tau(h) = \frac{\sqrt{x_0 + h + 3} - \sqrt{x_0 + 3}}{h}.$$

b)

En multipliant haut et bas par $\sqrt{x_0 + h + 3} + \sqrt{x_0 + 3}$:

$$\tau(h) = \frac{(x_0 + h + 3) - (x_0 + 3)}{h(\sqrt{x_0 + h + 3} + \sqrt{x_0 + 3})} = \frac{h}{h(\sqrt{x_0 + h + 3} + \sqrt{x_0 + 3})} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + h + 3} + \sqrt{x_0 + 3}}.$$

c)

$$\text{Quand } h \rightarrow 0 : f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0 + 3}}.$$

d)

$$f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

Exo 6 6 – inverse d'une racine

a)

$$\tau(h) = \frac{1}{h} \left(\frac{1}{\sqrt{x_0 + h}} - \frac{1}{\sqrt{x_0}} \right) = \frac{\sqrt{x_0} - \sqrt{x_0 + h}}{h \sqrt{x_0} \sqrt{x_0 + h}}.$$

b)

On multiplie haut et bas par $\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0 + h}$; le numérateur devient $x_0 - (x_0 + h) = -h$:

$$\tau(h) = \frac{-h}{h \sqrt{x_0} \sqrt{x_0 + h} (\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0 + h})} = \frac{-1}{\sqrt{x_0} \sqrt{x_0 + h} (\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0 + h})}.$$

c)

Quand $h \rightarrow 0$, le dénominateur tend vers $\sqrt{x_0} \cdot \sqrt{x_0} \cdot 2\sqrt{x_0} = 2x_0\sqrt{x_0}$, d'où $f'(x_0) = \boxed{-\frac{1}{2x_0\sqrt{x_0}}}$.

Exo 7 7 – raccord de deux morceaux

a)

À gauche $x^2 \rightarrow 1$, à droite $2x - 1 \rightarrow 1$, et $f(1) = 1$: f est **continue** en 1.

b)

Pour $h < 0$ on a $1 + h < 1$, donc $f(1 + h) = (1 + h)^2$: $\tau(h) = \frac{(1 + h)^2 - 1}{h} = \frac{2h + h^2}{h} = 2 + h \xrightarrow{h \rightarrow 0^-} 2$.

c)

Pour $h > 0$ on a $1 + h > 1$, donc $f(1 + h) = 2(1 + h) - 1 = 1 + 2h$: $\tau(h) = \frac{(1 + 2h) - 1}{h} = \frac{2h}{h} = 2 \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 2$.

d)

Les deux dérivées latérales sont **égales** à 2 : f est **dérivable** en 1, avec $\boxed{f'(1) = 2}$ (raccord lisse, tangente unique).

Exo 8 8 – tangente verticale

a)

$f(0) = 0$, donc pour $h > 0$: $\tau(h) = \frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$.

b)

Quand $h \rightarrow 0^+$, $\sqrt{h} \rightarrow 0^+$ donc $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$.

c)

La limite n'est pas un nombre réel ($+\infty$) : f **n'est pas dérivable** en 0. Géométriquement, la courbe admet en O une **tangente verticale**.

Exo 9 9 – déterminer deux paramètres

a)

À gauche $f(2) = 2^2 + 1 = 5$; à droite la limite est $2a + b$. Continuité : $\boxed{2a + b = 5}$.

b)

Pour $h < 0$, $f(2+h) = (2+h)^2 + 1$: $\tau(h) = \frac{[(2+h)^2 + 1] - 5}{h} = \frac{4h + h^2}{h} = 4 + h \xrightarrow{h \rightarrow 0^-} f'(2^-) = 4$.

c)

À droite, $f(2+h) = a(2+h) + b$ donne $\tau(h) = \frac{ah}{h} = a$, donc $f'(2^+) = a$. La dérivabilité impose $f'(2^-) = f'(2^+)$, d'où $\boxed{a = 4}$.

d)

En reportant dans $2a + b = 5$: $8 + b = 5$, donc $\boxed{b = -3}$ (le morceau de droite est $y = 4x - 3$).

Exo 10 10 – fonction homographique

a)

$$\tau(h) = \frac{1}{h} \left(\frac{x_0 + h}{x_0 + h + 1} - \frac{x_0}{x_0 + 1} \right).$$

b)

Au même dénominateur $(x_0 + h + 1)(x_0 + 1)$, le numérateur vaut

$$(x_0 + h)(x_0 + 1) - x_0(x_0 + h + 1) = x_0^2 + x_0 + hx_0 + h - x_0^2 - hx_0 - x_0 = h.$$

$$\text{Donc } \tau(h) = \frac{1}{h} \cdot \frac{h}{(x_0 + h + 1)(x_0 + 1)} = \frac{1}{(x_0 + h + 1)(x_0 + 1)}.$$

c)

$$\text{Quand } h \rightarrow 0 : f'(x_0) = \boxed{\frac{1}{(x_0 + 1)^2}}.$$

Exo 11 11 – dérivable malgré un changement de forme

a)

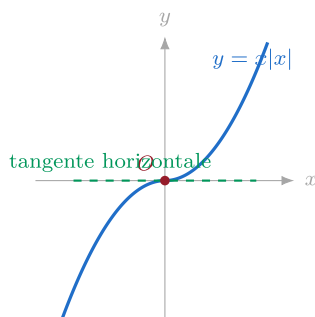
$$f(0) = 0, \text{ donc } \tau(h) = \frac{h|h| - 0}{h} = |h|.$$

b)

$\lim_{h \rightarrow 0^+} |h| = 0$ et $\lim_{h \rightarrow 0^-} |h| = 0$: les deux limites latérales valent 0.

c)

Les limites latérales existent et sont **égales** : $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = 0$ existe, donc f est **dérivable** en 0 avec $f'(0) = 0$. Contrairement à $|x|$, la fonction $x|x|$ admet en O une **tangente horizontale** unique.



Exo 12 12 – racine d'une fonction affine

a)

$$\tau(h) = \frac{\sqrt{2(x_0 + h) + 1} - \sqrt{2x_0 + 1}}{h} = \frac{\sqrt{2x_0 + 2h + 1} - \sqrt{2x_0 + 1}}{h}.$$

b)

En multipliant par le conjugué $\sqrt{2x_0 + 2h + 1} + \sqrt{2x_0 + 1}$, le numérateur devient $(2x_0 + 2h + 1) - (2x_0 + 1) = 2h$:

$$\tau(h) = \frac{2h}{h(\sqrt{2x_0 + 2h + 1} + \sqrt{2x_0 + 1})} = \frac{2}{\sqrt{2x_0 + 2h + 1} + \sqrt{2x_0 + 1}}.$$

c)

$$\text{Quand } h \rightarrow 0 : f'(x_0) = \frac{2}{2\sqrt{2x_0 + 1}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2x_0 + 1}}}.$$

Exo 13 13 – projectile

a)

Numérateur : $-5[(x_0 + h)^2 - x_0^2] + 20h = -5(2x_0h + h^2) + 20h = h(-10x_0 - 5h + 20)$. D'où $\tau(h) = -10x_0 - 5h + 20 \xrightarrow{h \rightarrow 0} \boxed{f'(x_0) = -10x_0 + 20}$.

b)

$$f'(x_0) = 0 \iff -10x_0 + 20 = 0 \iff x_0 = \boxed{2\text{s}}.$$

c)

La hauteur est maximale à cet instant (vitesse nulle au sommet) : $f(2) = -5 \times 4 + 20 \times 2 = -20 + 40 = \boxed{20\text{m}}$.

Exo 14 14 – inverse d'un carré

a)

$$\tau(h) = \frac{1}{h} \left(\frac{1}{(x_0 + h)^2} - \frac{1}{x_0^2} \right).$$

b)

Au même dénominateur $x_0^2(x_0 + h)^2$, le numérateur vaut $x_0^2 - (x_0 + h)^2 = -(2x_0h + h^2) = -h(2x_0 + h)$, donc

$$\tau(h) = \frac{1}{h} \cdot \frac{-h(2x_0 + h)}{x_0^2(x_0 + h)^2} = \frac{-(2x_0 + h)}{x_0^2(x_0 + h)^2}.$$

c)

$$\text{Quand } h \rightarrow 0 : f'(x_0) = \frac{-2x_0}{x_0^2 \cdot x_0^2} = \boxed{-\frac{2}{x_0^3}}.$$



Tous les exos cochés ? Passe au niveau réel.

+

Ce carnet est un extrait de notre bibliothèque d'entraînement — la suite se joue en ligne.

Sur simulationconcours.be

- ✓ Le même carnet en interactif, avec correction en un clic
- ✓ Les autres mécaniques de la fiche, niveau par niveau
- ✓ 3100 QCM type concours, corrigés et expliqués
- ✓ Les cours complets — gratuits — et les fiches de révision

Tous les jeudis : simulation du concours en ligne

En conditions réelles — chrono, QCM type concours et score immédiat.



Rejoins-nous sur simulationconcours.be

scanne le QR ou tape l'adresse — les cours complets sont gratuits