



simulationconcours.be



Mathématiques

Carnet d'entraînement



Tangente et lecture graphique

Dérivation · Mécanique 5 — des exercices calibrés concours, du plus simple au plus retors.

43 exercices

3 niveaux

corrigés détaillés

Comment bosser ce carnet

- ✓ Lis d'abord le tutoriel : la mécanique y est expliquée pas à pas
- ✓ Fais chaque niveau en entier **avant** d'ouvrir les corrigés
- ✓ Note à côté de chaque exo : réussi, hésité ou raté — et rejoue les ratés 48 h plus tard



simulationconcours.be

scanne & continue en ligne

Sommaire

- 1 Le tutoriel — la mécanique expliquée
- 2 Les exercices Facile x15 · Moyen x15 · Difficile x13
- 3 Les corrigés détaillés exercice par exercice

Le tutoriel

Ce document est un **carnet d'exercices** : on t'explique d'abord la mécanique, puis tu la travailles sur 43 exercices classés en trois niveaux. Les corrigés détaillés t'attendent en deuxième partie, après la page « Corrigés » — pas avant de l'avoir mérité.

À RETENIR l'équation de la tangente

Soit f dérivable en x_0 . La **tangente** à la courbe de f au point $P_0(x_0; f(x_0))$ est la droite d'équation

$$y = (x - x_0) f'(x_0) + f(x_0)$$

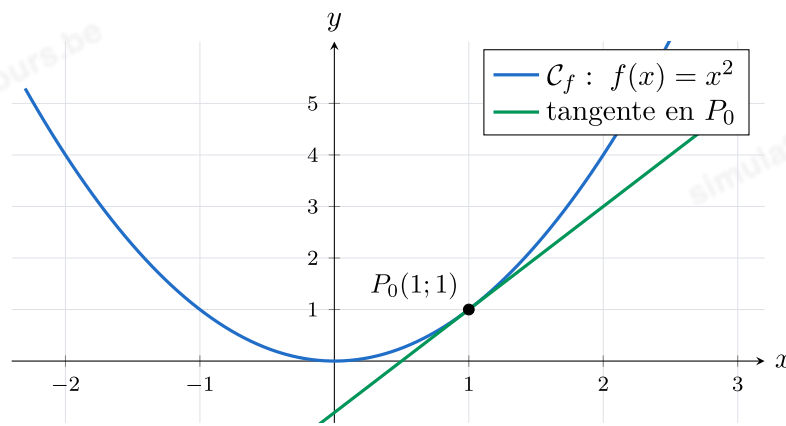
Provenance. Une droite de pente m passant par le point $(x_0; y_0)$ s'écrit $y = m(x - x_0) + y_0$. Pour la tangente, la pente vaut $m = f'(x_0)$ (c'est là tout le sens du nombre dérivé) et le point est $(x_0; f(x_0))$. On remplace : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

MÉTHODE écrire l'équation de la tangente en x_0

- 1 **Calculer** $f(x_0)$: l'ordonnée du point de contact.
- 2 **Dériver** : calculer $f'(x)$, puis évaluer $f'(x_0)$ (la pente).
- 3 **Remplacer** dans $y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$.
- 4 **Développer** et réduire pour obtenir $y = mx + p$.

À RETENIR cas particuliers de pente

- **Tangente horizontale** : elle a lieu là où $f'(x_0) = 0$. Son équation est simplement $y = f(x_0)$ (souvent un extremum).
- **Droites parallèles** : même pente, $m_1 = m_2$.
- **Droites perpendiculaires** : produit des pentes $m_1 \cdot m_2 = -1$, soit $m_2 = -\frac{1}{m_1}$.
- **Retrouver $f'(x_0)$** : si l'on connaît deux points A et B de la tangente, alors $f'(x_0) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ (pente entre deux points).



EXEMPLE tangente à $f(x) = x^2$ en $x_0 = 1$

1. **Point** : $f(1) = 1^2 = 1$, donc $P_0(1; 1)$.
2. **Pente** : $f'(x) = 2x$, donc $f'(1) = 2$.
3. **Remplacer** : $y = (x - 1) \cdot 2 + 1$.
4. **Développer** : $y = 2x - 2 + 1 = \boxed{2x - 1}$.

 À RETENIR *lecture graphique : relier f , f' et f''*

Sur le graphe de f		Traduction
f monte (croissante)	$\Longleftrightarrow$	$f' > 0$
f descend (décroissante)	$\Longleftrightarrow$	$f' < 0$
f présente un extremum (max ou min)	$\implies$	$f' = 0$ (tangente horizontale)
f est convexe (creux vers le haut, $\smile$)	$\Longleftrightarrow$	$f'' > 0$
f est concave (bosse vers le bas, $\frown$)	$\Longleftrightarrow$	$f'' < 0$
point d'inflexion (changement de courbure)	$\implies$	$f'' = 0$ (et change de signe)

Les exercices

FACILE 15 exercices

Exo 1 1

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de $f(x) = x^2$ au point d'abscisse $x_0 = 1$.

Exo 2 2

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de $f(x) = x^3$ au point d'abscisse $x_0 = 2$.

Exo 3 3

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de $f(x) = \frac{1}{x}$ au point d'abscisse $x_0 = 1$.

Exo 4 4

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de $f(x) = \sqrt{x}$ au point d'abscisse $x_0 = 4$.

Exo 5 5

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de $f(x) = x^2 - 2x$ au point d'abscisse $x_0 = 0$.

Exo 6 6

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de $f(x) = x^2 + 3$ au point d'abscisse $x_0 = 1$.

Exo 7 7

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de $f(x) = 2x^2 - x$ au point d'abscisse $x_0 = 1$.

Exo 8 8

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de $f(x) = x^3 + x$ au point d'abscisse $x_0 = 1$.

Exo 9 9

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de $f(x) = -x^2 + 4x$ au point d'abscisse $x_0 = 1$.

Exo 10 10

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de $f(x) = x^2 - 6x + 5$ au point d'abscisse $x_0 = 2$.

Exo 11 11

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de $f(x) = 2\sqrt{x}$ au point d'abscisse $x_0 = 1$.

Exo 12 12

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de $f(x) = x^3 - 2$ au point d'abscisse $x_0 = 1$.

Exo 13 13

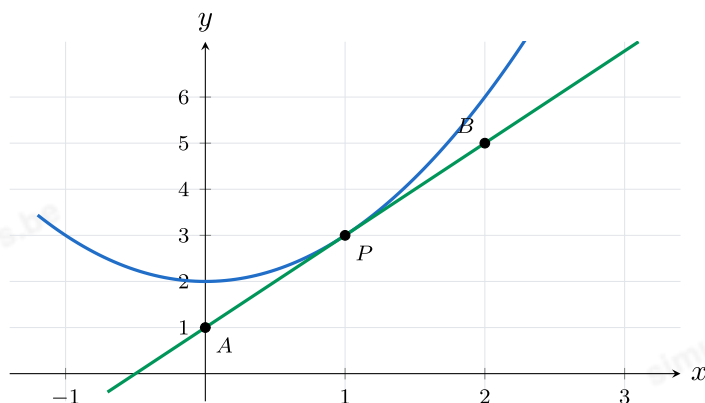
Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de $f(x) = (x - 1)^2$ au point d'abscisse $x_0 = 0$.

Exo 14 14

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de $f(x) = \frac{3}{x}$ au point d'abscisse $x_0 = 1$.

Exo 15 15 – lecture graphique

Ci-dessous, la droite verte est la **tangente** à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point P d'abscisse $x_0 = 1$. Cette tangente passe par les points $A(0; 1)$ et $B(2; 5)$.



a)

Lire la **pente** de la tangente à l'aide des points A et B .

b)

En déduire le nombre dérivé $f'(1)$.

c)

Donner l'équation de cette tangente.

MOYEN 15 exercices

Exo 1 1

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 1$. En quel point la tangente à $\mathcal{C}_f$ est-elle **horizontale**? Donner l'équation de cette tangente.

Exo 2 2

Soit $f(x) = x^3 - 3x$. Déterminer les **abscisses** pour lesquelles la tangente est horizontale, puis les **points** correspondants de la courbe.

Exo 3 3

Soit $f(x) = x^2$. Montrer que la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x_0 = 1$ est **perpendiculaire** à la droite $\mathcal{D} : y = -\frac{x}{2} + 3$.

Exo 4 4

Une fonction f est dérivable et l'on sait que $f(2) = 1$. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = 2$ passe aussi par le point $B(4; 5)$. Déterminer $f'(2)$.

Exo 5 5

Soit $f(x) = x^2$. En quel point la tangente à $\mathcal{C}_f$ est-elle **parallèle** à la droite $\mathcal{D} : y = 6x - 1$?

Exo 6 6

Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$. Déterminer les points de $\mathcal{C}_f$ où la tangente est **horizontale**, puis donner l'équation de chacune de ces tangentes.

Exo 7 7

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 5$. En quel point la tangente à $\mathcal{C}_f$ est-elle **parallèle** à la droite $\mathcal{D} : y = 2x + 3$? Donner l'équation de cette tangente.

Exo 8 8

Soit $f(x) = \sqrt{x}$. En quel point la tangente à $\mathcal{C}_f$ est-elle **perpendiculaire** à la droite $\mathcal{D} : y = -8x + 1$? Donner l'équation de cette tangente.

Exo 9 9

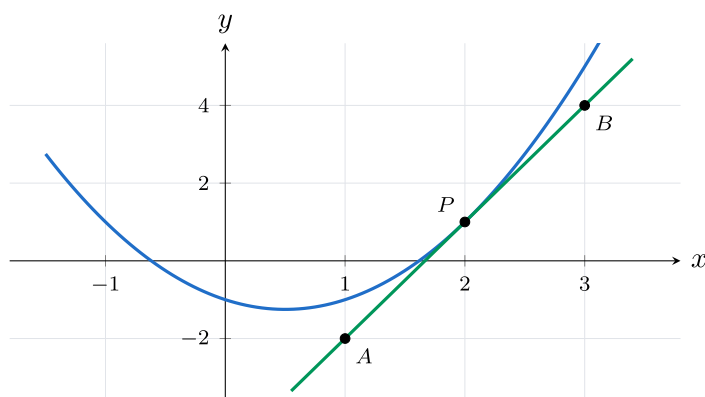
Soit $f(x) = x^2$. Déterminer les équations des tangentes à $\mathcal{C}_f$ qui **passent par le point** $A(0; -1)$.
(Indication : appellera l'abscisse du point de contact.)

Exo 10 10

Soit $f(x) = x^2 - 3x$. En quel point la tangente à $\mathcal{C}_f$ est-elle **horizontale** ? Donner l'équation de cette tangente.

Exo 11 11 – lecture graphique

Ci-dessous, la droite verte est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point P d'abscisse $x_0 = 2$; elle passe par les points $A(1; -2)$ et $B(3; 4)$.



a)

Lire $f(2)$ et le nombre dérivé $f'(2)$.

b)

En déduire l'équation de la tangente.

c)

La fonction f est-elle croissante ou décroissante au voisinage de $x = 2$? Justifier.

Exo 12 12

Soit $f(x) = x^2 + bx + 3$, où b est un réel. Déterminer b pour que la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = 2$ ait pour **coefficient directeur** 1, puis donner l'équation de cette tangente.

Exo 13 13

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Déterminer le(s) point(s) de $\mathcal{C}_f$ où la tangente a pour **pente** -3 , puis donner l'équation de la tangente correspondante.

Exo 14 14

Soit $f(x) = x + \frac{1}{x}$ (avec $x \neq 0$). Déterminer les points de $\mathcal{C}_f$ où la tangente est **horizontale**, puis donner l'équation de chacune de ces tangentes.

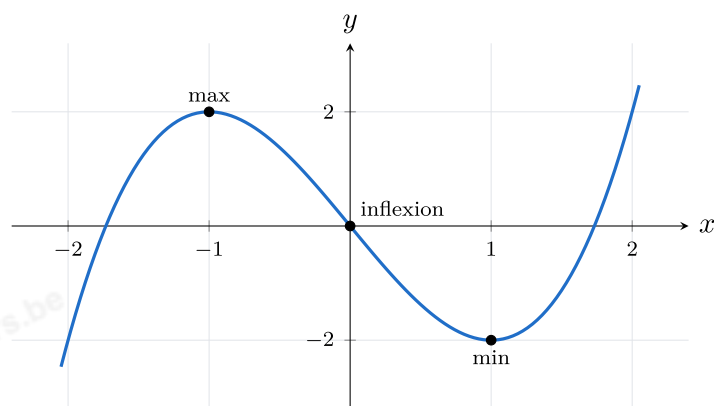
Exo 15 15

Soit $f(x) = x^3$. En quels points la tangente à $\mathcal{C}_f$ est-elle **perpendiculaire** à la droite $\mathcal{D} : y = -\frac{x}{3}$? Donner l'équation de chacune de ces tangentes.

DIFFICILE 13 exercices

Exo 1 1 – Lecture graphique d'une cubique

On considère la fonction $f(x) = x^3 - 3x$, dont la courbe $\mathcal{C}_f$ est représentée ci-dessous. Elle monte, atteint un **maximum** en $x = -1$, descend jusqu'à un **minimum** en $x = 1$, puis remonte.



Répondre par **vrai/faux** en **justifiant** par la lecture graphique.

a)

Donner le **signe de f'** sur chacun des intervalles $] -\infty; -1[$, $] -1; 1[$ et $]1; +\infty[$.

b)

Que vaut $f'(-1)$ et $f'(1)$? Justifier.

c)

Où a-t-on $f'' > 0$ et où a-t-on $f'' < 0$? En déduire l'abscisse du **point d'inflexion**.

Exo 2 2 – Reconnaître la courbe de f'

Soit f une fonction **cubique** (de la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d$) qui admet un **maximum** en $x = 0$ et un **minimum** en $x = 2$.

- 1** Que valent $f'(0)$ et $f'(2)$?
- 2** Déterminer le **signe de f'** avant 0, entre 0 et 2, puis après 2.
- 3** En déduire que la courbe de f' est une **parabole tournée vers le haut** passant par les points $(0; 0)$ et $(2; 0)$.

Exo 3 3 – Reconstituer les paramètres

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$). On sait que :

a)

la courbe $\mathcal{C}_f$ passe par le point $(0; 2)$;

b)

la tangente en $x = 1$ est **horizontale** ;

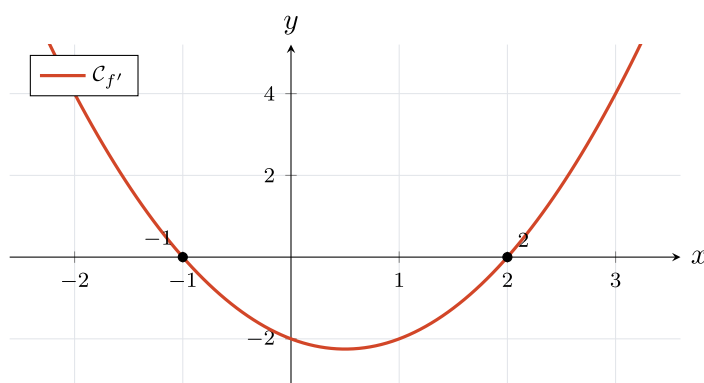
c)

$$f(1) = 0.$$

- 1 Traduire chacune des trois conditions (i), (ii), (iii) par une équation portant sur a, b, c .
- 2 Résoudre le système obtenu.
- 3 Donner l'expression de f et la factoriser.

Exo 4 4 – lire les variations sur la courbe de f'

La courbe ci-dessous est celle de la **dérivée** f' d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. C'est une parabole tournée vers le haut qui coupe l'axe des abscisses en $x = -1$ et $x = 2$.



a)

Donner le **signe de f'** sur $] -\infty; -1[$, $] -1; 2[$ et $] 2; +\infty[$.

b)

En déduire les **variations** de f et la nature (maximum ou minimum) de chaque extrémum.

c)

On sait de plus que $f(-1) = 3$. Donner l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse $x = -1$.

Exo 5 5 – tangente formant un angle donné

$$\text{Soit } f(x) = \frac{x^2}{2}.$$

a)

Déterminer le point où la tangente à C_f fait un angle de 45° avec l'axe des abscisses (tangente montante), et donner son équation.

b)

Même question pour un angle de 135° (tangente descendante).

c)

Existe-t-il un point où la tangente serait **verticale** (angle de 90°) ? Justifier.

Exo 6 6 – tangente parallèle à une corde

Soit $f(x) = x^2$ et les deux points $A(1; 1)$ et $B(3; 9)$ de $\mathcal{C}_f$.

a)

Déterminer l'équation de la **corde** (AB) .

b)

Déterminer le point de $\mathcal{C}_f$ où la tangente est **parallèle** à cette corde, et donner l'équation de cette tangente.

c)

Vérifier que ce point a pour abscisse le **milieu** de $[1; 3]$, et interpréter géométriquement.

Exo 7 7 – deux courbes tangentes entre elles

On considère $f(x) = x^2$ et $g(x) = -(x - 2)^2 + c$, où c est un réel. On souhaite que les deux courbes soient **tangentes** : elles se touchent en un point où elles ont la même tangente.

a)

Écrire les deux conditions traduisant « même point de contact » et « même pente ».

b)

En déduire l'abscisse du point de contact, puis la valeur de c .

c)

Donner l'équation de la **tangente commune**.

Exo 8 8 – reconstituer une fonction cubique

Soit $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (avec $a \neq 0$). On sait que :

- $\mathcal{C}_f$ passe par l'origine ;
- la tangente en $x = 0$ est **horizontale** ;
- la tangente en $x = 2$ est **horizontale** ;
- $f(2) = -4$.

- 1 Traduire chacune des conditions (i) à (iv) par une équation portant sur a, b, c, d .
- 2 Résoudre le système obtenu.
- 3 Donner l'expression de f , la factoriser, et vérifier les deux tangentes horizontales.

Exo 9 9 – retrouver une parabole à partir de ses tangentes

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$). On sait que la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = 1$ est la droite $y = 2x$, et que la tangente au point d'abscisse $x = -1$ est **horizontale**.

a)

Traduire ces informations par trois équations portant sur a, b, c (attention : « la tangente en $x = 1$ est $y = 2x$ » fournit **deux** conditions).

b)

Résoudre le système.

c)

Donner l'expression de f , la factoriser, et vérifier les deux conditions de tangence.

Exo 10 10 – une aire indépendante du point de contact

Soit $f(x) = \frac{1}{x}$ et un réel $a > 0$. On note T_a la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a .

a)

Déterminer l'équation de T_a .

b)

Déterminer les coordonnées des points d'intersection de T_a avec l'axe des ordonnées puis avec l'axe des abscisses.

c)

Montrer que l'aire du triangle formé par T_a et les deux axes ne dépend pas de a , et calculer cette aire.

Exo 11 11 – la tangente traverse la courbe

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

a)

Calculer $f''(x)$ et déterminer l'abscisse du **point d'inflexion** de $\mathcal{C}_f$.

b)

Donner l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en ce point.

c)

Étudier le signe de la différence $f(x) - y_T$ (où y_T est l'ordonnée de T) et en déduire que $\mathcal{C}_f$ **traverse** sa tangente au point d'inflexion.

Exo 12 12 – tangentes issues d'un point donné

Soit $f(x) = x^3 - 3x$ et le point $P(2; 2)$.

a)

Déterminer l'équation de la tangente T_a à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a .

b)

Écrire que T_a passe par $P(2; 2)$ et montrer que cela conduit à l'équation $a^3 - 3a^2 + 4 = 0$.

c)

Résoudre cette équation (vérifier que $a = -1$ en est racine), puis donner les équations des tangentes à $\mathcal{C}_f$ issues de P .

Exo 13 13 – une pente jamais atteinte

Soit $f(x) = x + \frac{4}{x}$, définie pour $x > 0$.

a)

Calculer $f'(x)$ et déterminer le point où la tangente à $\mathcal{C}_f$ est **horizontale**.

b)

Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = 1$.

c)

Existe-t-il un point où la tangente est **parallèle** à la droite $y = x$? Justifier.



DEUXIÈME PARTIE

Corrigés

Chaque exercice repris pas à pas, niveau par niveau.
Compare ta démarche, pas seulement ton résultat.





Une seconde – avant d'ouvrir le corrigé...



Si ce carnet t'aide, rends-nous la pareille : parle de simulationconcours.be à quelqu'un qui prépare le concours. C'est comme ça qu'on peut continuer.

Ce qu'on a préparé pour toi

- ✓ Ce carnet en interactif, avec correction en un clic
- ✓ Les cours complets, chapitre par chapitre – gratuits
- ✓ 3100 QCM type concours, corrigés et expliqués
- ✓ Des fiches de révision à imprimer

Tous les jeudis : simulation du concours en ligne

En conditions réelles – chrono, QCM type concours et score immédiat.



Rejoins-nous sur simulationconcours.be

scanne le QR ou tape l'adresse – puis reviens vérifier tes réponses

Les corrigés

FACILE 15 exercices

Exo 1 1

Point : $f(1) = 1$. **Pente :** $f'(x) = 2x$, donc $f'(1) = 2$.

Tangente : $y = (x - 1) \cdot 2 + 1 = 2x - 2 + 1 = \boxed{2x - 1}$.

Exo 2 2

Point : $f(2) = 2^3 = 8$. **Pente :** $f'(x) = 3x^2$, donc $f'(2) = 3 \cdot 4 = 12$.

Tangente : $y = (x - 2) \cdot 12 + 8 = 12x - 24 + 8 = \boxed{12x - 16}$.

Exo 3 3

Point : $f(1) = 1$. **Pente :** $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, donc $f'(1) = -1$.

Tangente : $y = (x - 1) \cdot (-1) + 1 = -x + 1 + 1 = \boxed{-x + 2}$.

Exo 4 4

Point : $f(4) = \sqrt{4} = 2$. **Pente :** $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, donc $f'(4) = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$.

Tangente : $y = (x - 4) \cdot \frac{1}{4} + 2 = \frac{x}{4} - 1 + 2 = \boxed{\frac{x}{4} + 1}$.

Exo 5 5

Point : $f(0) = 0$. **Pente :** $f'(x) = 2x - 2$, donc $f'(0) = -2$.

Tangente : $y = (x - 0) \cdot (-2) + 0 = \boxed{-2x}$.

Exo 6 6

Point : $f(1) = 1 + 3 = 4$. **Pente :** $f'(x) = 2x$, donc $f'(1) = 2$.

Tangente : $y = (x - 1) \cdot 2 + 4 = 2x - 2 + 4 = \boxed{2x + 2}$.

Exo 7 7

Point : $f(1) = 2 - 1 = 1$. **Pente :** $f'(x) = 4x - 1$, donc $f'(1) = 3$.

Tangente : $y = (x - 1) \cdot 3 + 1 = 3x - 3 + 1 = \boxed{3x - 2}$.

Exo 8 8

Point : $f(1) = 1 + 1 = 2$. **Pente :** $f'(x) = 3x^2 + 1$, donc $f'(1) = 4$.

Tangente : $y = (x - 1) \cdot 4 + 2 = 4x - 4 + 2 = \boxed{4x - 2}$.

Exo 9 9

Point : $f(1) = -1 + 4 = 3$. **Pente :** $f'(x) = -2x + 4$, donc $f'(1) = 2$.

Tangente : $y = (x - 1) \cdot 2 + 3 = 2x - 2 + 3 = \boxed{2x + 1}$.

Exo 10 10

Point : $f(2) = 4 - 12 + 5 = -3$. **Pente :** $f'(x) = 2x - 6$, donc $f'(2) = -2$.

Tangente : $y = (x - 2) \cdot (-2) - 3 = -2x + 4 - 3 = \boxed{-2x + 1}$.

Exo 11 11

Point : $f(1) = 2\sqrt{1} = 2$. **Pente :** $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, donc $f'(1) = 1$.

Tangente : $y = (x - 1) \cdot 1 + 2 = x - 1 + 2 = \boxed{x + 1}$.

Exo 12 12

Point : $f(1) = 1 - 2 = -1$. **Pente :** $f'(x) = 3x^2$, donc $f'(1) = 3$.

Tangente : $y = (x - 1) \cdot 3 - 1 = 3x - 3 - 1 = \boxed{3x - 4}$.

Exo 13 13

Point : $f(0) = (-1)^2 = 1$. **Pente :** $f'(x) = 2(x - 1)$, donc $f'(0) = -2$.

Tangente : $y = (x - 0) \cdot (-2) + 1 = \boxed{-2x + 1}$.

Exo 14 14

Point : $f(1) = 3$. **Pente :** $f'(x) = -\frac{3}{x^2}$, donc $f'(1) = -3$.

Tangente : $y = (x - 1) \cdot (-3) + 3 = -3x + 3 + 3 = \boxed{-3x + 6}$.

Exo 15 15 – lecture graphique

a)

Pente lue entre $A(0; 1)$ et $B(2; 5)$: $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - 1}{2 - 0} = \frac{4}{2} = \boxed{2}$.

b)

La pente de la tangente est le nombre dérivé : $\boxed{f'(1) = 2}$.

c)

La tangente passe par $A(0; 1)$: son ordonnée à l'origine est 1. Avec la pente 2 : $\boxed{y = 2x + 1}$.

MOYEN 15 exercices

Exo 1 1

Une tangente est horizontale là où $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 2x - 4. \text{ On résout } 2x - 4 = 0 \iff x = 2.$$

$$\text{Ordonnée : } f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = 4 - 8 + 1 = -3. \text{ Point } (2; -3).$$

La tangente horizontale a pour équation $y = -3$.

Exo 2 2

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1).$$

$$f'(x) = 0 \iff x = 1 \text{ ou } x = -1.$$

$$\text{Points : } f(1) = 1 - 3 = -2 \Rightarrow (1; -2) \text{ et } f(-1) = -1 + 3 = 2 \Rightarrow (-1; 2).$$

Abscisses $x = \pm 1$; points $(1; -2)$ et $(-1; 2)$.

Exo 3 3

Pente de la tangente : $f'(x) = 2x$, donc $f'(1) = 2$. On note $m_1 = 2$.

$$\text{Pente de } \mathcal{D} : y = -\frac{x}{2} + 3 : m_2 = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Produit : } m_1 \cdot m_2 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1.$$

Le produit des pentes vaut -1 : la tangente est donc bien **perpendiculaire** à $\mathcal{D}$. ■

Exo 4 4

La tangente passe par $A(2; f(2)) = A(2; 1)$ et par $B(4; 5)$.

$$\text{Sa pente est } f'(2) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - 1}{4 - 2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Donc $f'(2) = 2$.

Exo 5 5

Deux droites sont parallèles si elles ont la même pente. Il faut donc $f'(x) = 6$.

$$f'(x) = 2x, \text{ d'où } 2x = 6 \iff x = 3.$$

Le point cherché a pour abscisse $x = 3$ (et $f(3) = 9$, point $(3; 9)$).

Exo 6 6

Une tangente est horizontale là où $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x - 1)(x - 3), \text{ donc } f'(x) = 0 \iff x = 1 \text{ ou } x = 3.$$

$$\text{Points : } f(1) = 1 - 6 + 9 + 1 = 5 \Rightarrow (1; 5) \text{ et } f(3) = 27 - 54 + 27 + 1 = 1 \Rightarrow (3; 1).$$

Tangentes horizontales : $y = 5$ (en $x = 1$) et $y = 1$ (en $x = 3$).

Exo 7 7

Deux droites sont parallèles si elles ont la même pente : il faut $f'(x) = 2$.

$f'(x) = 2x - 4$, d'où $2x - 4 = 2 \iff x = 3$. Ordonnée : $f(3) = 9 - 12 + 5 = 2$, point $(3; 2)$.

Tangente : $y = (x - 3) \cdot 2 + 2 = 2x - 6 + 2 = \boxed{2x - 4}$.

Exo 8 8

Perpendiculaire à une droite de pente -8 : la tangente a pour pente m avec $m \cdot (-8) = -1$, soit $m = \frac{1}{8}$.

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{8} \iff 2\sqrt{x} = 8 \iff \sqrt{x} = 4 \iff x = 16$. Point : $f(16) = 4 \Rightarrow (16; 4)$.

Tangente : $y = (x - 16) \cdot \frac{1}{8} + 4 = \frac{x}{8} - 2 + 4 = \boxed{\frac{x}{8} + 2}$.

Exo 9 9

Tangente au point d'abscisse a : $f(a) = a^2$, $f'(a) = 2a$, d'équation

$$y = (x - a) \cdot 2a + a^2 = 2ax - 2a^2 + a^2 = 2ax - a^2.$$

Elle passe par $A(0; -1)$ ssi $-1 = 2a \cdot 0 - a^2 = -a^2$, soit $a^2 = 1 \iff a = \pm 1$.

$a = 1$: $y = 2x - 1$; $a = -1$: $y = -2x - 1$.

Exo 10 10

$f'(x) = 2x - 3 = 0 \iff x = \frac{3}{2}$. Ordonnée : $f(\frac{3}{2}) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{9}{4}$, point $(\frac{3}{2}; -\frac{9}{4})$.

Tangente horizontale : $y = -\frac{9}{4}$.

Exo 11 11 – lecture graphique

a)

Le point de contact P a pour ordonnée $f(2) = 1$. La pente lue entre $A(1; -2)$ et $B(3; 4)$ est $f'(2) = \frac{4 - (-2)}{3 - 1} = \frac{6}{2} = 3$. Donc $f(2) = 1$ et $f'(2) = 3$.

b)

Tangente : $y = (x - 2) \cdot 3 + 1 = 3x - 6 + 1 = \boxed{3x - 5}$.

c)

$f'(2) = 3 > 0$: le nombre dérivé est positif, donc f est **croissante** au voisinage de $x = 2$.

Exo 12 12

$f'(x) = 2x + b$. On impose $f'(2) = 1$: $2 \cdot 2 + b = 1 \iff 4 + b = 1 \iff \boxed{b = -3}$.

Alors $f(x) = x^2 - 3x + 3$ et $f(2) = 4 - 6 + 3 = 1$.

Tangente : $y = (x - 2) \cdot 1 + 1 = x - 2 + 1 = \boxed{x - 1}$.

Exo 13 13

$f'(x) = 3x^2 - 6x$. On résout $f'(x) = -3$:

$$3x^2 - 6x = -3 \iff 3x^2 - 6x + 3 = 0 \iff x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x - 1)^2 = 0 \iff x = 1.$$

Un seul point : $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0 \Rightarrow (1; 0)$ (la pente -3 est en fait la pente *minimale* de f').

Tangente : $y = (x - 1) \cdot (-3) + 0 = \boxed{-3x + 3}$.

Exo 14 14

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$. Tangente horizontale : $f'(x) = 0 \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1$.

Points : $f(1) = 2 \Rightarrow (1; 2)$ et $f(-1) = -2 \Rightarrow (-1; -2)$.

Tangentes horizontales : $\boxed{y = 2}$ (en $x = 1$) et $\boxed{y = -2}$ (en $x = -1$).

Exo 15 15

La droite $\mathcal{D}$ a pour pente $-\frac{1}{3}$. Une tangente de pente m lui est perpendiculaire ssi $m \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1$, soit $m = 3$.

$f'(x) = 3x^2 = 3 \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1$. Points : $(1; 1)$ et $(-1; -1)$.

$x = 1 : y = (x - 1) \cdot 3 + 1 = \boxed{3x - 2}$; $x = -1 : y = (x + 1) \cdot 3 - 1 = \boxed{3x + 2}$.

DIFFICILE 13 exercices

Exo 1 1 – Lecture graphique d'une cubique

a) Signe de f' . f' traduit le sens de variation.

a)

Sur $] -\infty; -1[$ la courbe **monte** $\Rightarrow f' > 0$.

b)

Sur $] -1; 1[$ la courbe **descend** $\Rightarrow f' < 0$.

c)

Sur $]1; +\infty[$ la courbe **remonte** $\Rightarrow f' > 0$.

Vérification analytique : $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$, du signe attendu $(+, -, +)$.

b) Valeurs $f'(-1)$ et $f'(1)$. En $x = -1$ (maximum) et $x = 1$ (minimum) la tangente est **horizontale**, donc

$$f'(-1) = 0 \quad \text{et} \quad f'(1) = 0.$$

(On retrouve $f'(\pm 1) = 3 \cdot 1 - 3 = 0$.)

c) Signe de f'' et point d'inflexion. $f''(x) = 6x$.

- Sur $] - \infty; 0[$: $f'' < 0$, la courbe est **concave** ($\cap$).
- Sur $]0; +\infty[$: $f'' > 0$, la courbe est **convexe** ($\cup$).

f'' change de signe en $x = 0$: c'est le **point d'inflexion**, d'abscisse $x = 0$ (point $(0; 0)$).

Exo 2 2 – Reconnaître la courbe de f'

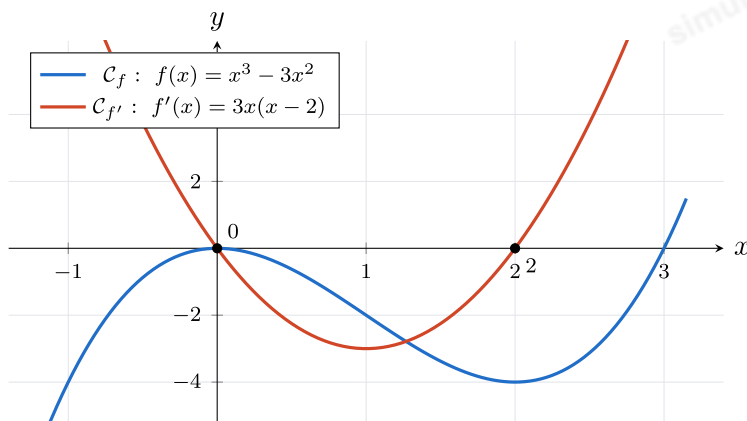
a) Un extremum donne une tangente horizontale, donc $f' = 0$ en ce point :

$$f'(0) = 0 \quad \text{et} \quad f'(2) = 0.$$

b) Signe de f' . Un **maximum** en 0 : f monte avant, descend après $\Rightarrow f' > 0$ sur $] - \infty; 0[$ puis $f' < 0$ sur $]0; 2[$. Un **minimum** en 2 : f descend avant, monte après $\Rightarrow f' < 0$ sur $]0; 2[$ (cohérent) puis $f' > 0$ sur $]2; +\infty[$. Bilan : $(+, -, +)$.

c) f est cubique donc f' est un **polynôme du second degré** (une parabole). Elle s'annule en 0 et 2 (racines) : $f'(x) = kx(x-2)$. Comme $f' > 0$ « à l'extérieur » des racines et $f' < 0$ « entre » elles, la parabole est **tournée vers le haut** ($k > 0$), et elle passe bien par $(0; 0)$ et $(2; 0)$.

Illustration avec l'exemple $f(x) = x^3 - 3x^2$ (alors $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$) :



La parabole rouge ($\mathcal{C}_{f'}$) est bien tournée vers le haut et coupe l'axe en $x = 0$ et $x = 2$, précisément là où $\mathcal{C}_f$ (bleue) présente son maximum et son minimum.

Exo 3 3 – Reconstituer les paramètres

a) Traduction des conditions. On a $f(x) = ax^2 + bx + c$ et $f'(x) = 2ax + b$.

a)

$\mathcal{C}_f$ passe par $(0; 2) : f(0) = 2 \Rightarrow c = 2$.

b)

tangente horizontale en $x = 1 : f'(1) = 0 \Rightarrow 2a + b = 0$.

c)

$f(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$.

b) Résolution du système. De (i) : $c = 2$. On reporte dans (iii) : $a + b + 2 = 0$, soit $a + b = -2$. Avec (ii) $b = -2a$:

$$a + (-2a) = -2 \implies -a = -2 \implies a = 2, \quad b = -2a = -4, \quad c = 2.$$

c) Expression et factorisation.

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 2 = 2(x^2 - 2x + 1) = \boxed{2(x - 1)^2}.$$

Contrôle : $f(0) = 2 ; f(1) = 0 ; f'(x) = 4x - 4, f'(1) = 0$. La parabole a bien son sommet en $(1; 0)$, où la tangente est horizontale.

Exo 4 4 – lire les variations sur la courbe de f'

a)

La parabole $\mathcal{C}_{f'}$ est tournée vers le haut et s'annule en -1 et 2 : elle est **négative entre ses racines**, positive à l'extérieur. Donc $f' > 0$ sur $]-\infty; -1[$, $f' < 0$ sur $] -1; 2[$ et $f' > 0$ sur $]2; +\infty[$.

b)

$f' > 0 \Rightarrow f$ croissante ; $f' < 0 \Rightarrow f$ décroissante. Ainsi f croît, puis décroît, puis croît : elle présente un **maximum en $x = -1$** et un **minimum en $x = 2$** .

c)

En $x = -1$ (extrémum) la tangente est horizontale, car $f'(-1) = 0$. Son équation est donc $y = f(-1)$, soit $\boxed{y = 3}$.

Exo 5 5 – tangente formant un angle donné

a)

Un angle de 45° correspond à une pente $\tan 45^\circ = 1$. Or $f'(x) = x$, donc $f'(x) = 1 \iff x = 1$. Point : $f(1) = \frac{1}{2}$, soit $(1; \frac{1}{2})$. Tangente : $y = (x - 1) \cdot 1 + \frac{1}{2} = \boxed{x - \frac{1}{2}}$.

b)

Un angle de 135° correspond à une pente $\tan 135^\circ = -1$. $f'(x) = x = -1 \iff x = -1$. Point : $(-1; \frac{1}{2})$. Tangente : $y = (x + 1) \cdot (-1) + \frac{1}{2} = \boxed{-x - \frac{1}{2}}$.

c)

Une tangente verticale exigerait une pente infinie. Or $f'(x) = x$ est **finie** pour tout $x \in \mathbb{R}$ (f est dérivable partout) : il n'existe donc **aucune** tangente verticale.

Exo 6 6 – tangente parallèle à une corde

a)

Pente de la corde : $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{9 - 1}{3 - 1} = 4$. Elle passe par $A(1; 1)$: $y = 4(x - 1) + 1 = \boxed{4x - 3}$.

b)

Tangente parallèle $\Rightarrow$ même pente : $f'(x) = 2x = 4 \iff x = 2$. Point : $f(2) = 4$, soit $(2; 4)$. Tangente : $y = (x - 2) \cdot 4 + 4 = \boxed{4x - 4}$.

c)

Milieu de $[1; 3]$: $\frac{1+3}{2} = 2$, qui est bien l'abscisse trouvée. **Interprétation :** pour une parabole, la tangente parallèle à une corde touche la courbe au point dont l'abscisse est le *milieu* des abscisses des extrémités de la corde.

Exo 7 7 – deux courbes tangentes entre elles

a)

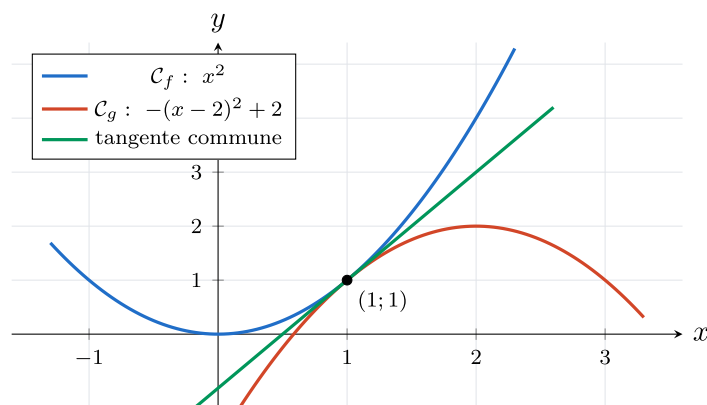
Se toucher au même point avec la même tangente s'écrit : $f(x) = g(x)$ (même point) **et** $f'(x) = g'(x)$ (même pente). Ici $f'(x) = 2x$ et $g'(x) = -2(x - 2)$.

b)

Même pente : $2x = -2(x - 2) \iff 2x = -2x + 4 \iff x = 1$. Même valeur : $f(1) = g(1) \iff 1 = -(1 - 2)^2 + c = -1 + c \iff c = 2$. Point de contact : $(1; 1)$, et $g(x) = -(x - 2)^2 + 2$.

c)

Pente commune $f'(1) = 2$, point $(1; 1)$: tangente commune $y = (x - 1) \cdot 2 + 1 = \boxed{2x - 1}$.



Exo 8 8 – reconstituer une fonction cubique

On a $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

- 1 (i) $f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$; (ii) $f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$; (iii) $f'(2) = 0 \Rightarrow 12a + 4b + c = 0$; (iv) $f(2) = -4 \Rightarrow 8a + 4b + 2c + d = -4$.
- 2 De (i)-(ii) : $c = 0, d = 0$. (iii) devient $12a + 4b = 0 \Rightarrow b = -3a$. (iv) devient $8a + 4b = -4$, soit $8a - 12a = -4 \Rightarrow -4a = -4 \Rightarrow a = 1$, puis $b = -3$.
- 3 $f(x) = x^3 - 3x^2 = \boxed{x^2(x - 3)}$. Contrôle : $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$ s'annule en $x = 0$ et $x = 2$: les tangentes y sont bien horizontales.

Exo 9 9 – retrouver une parabole à partir de ses tangentes

On a $f'(x) = 2ax + b$.

a)

« Tangente $y = 2x$ en $x = 1$ » signifie que le point est sur la droite **et** que la pente vaut 2 : $f(1) = 2$ et $f'(1) = 2$. « Tangente horizontale en $x = -1$ » : $f'(-1) = 0$. D'où : $a + b + c = 2, 2a + b = 2, -2a + b = 0$.

b)

Les deux dernières donnent, par soustraction, $4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$, puis $b = 2a = 1$. Enfin $a + b + c = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} + 1 + c = 2 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$.

c)

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1) = \boxed{\frac{1}{2}(x + 1)^2}$. Contrôle : $f(-1) = 0$ (sommet, tangente horizontale); $f(1) = 2$ et $f'(x) = x + 1$ donne $f'(1) = 2$, donc la tangente en $x = 1$ est bien $y = 2x$.

Exo 10 10 – une aire indépendante du point de contact

a)

$$f(a) = \frac{1}{a}, f'(x) = -\frac{1}{x^2} \text{ donc } f'(a) = -\frac{1}{a^2}. \text{ Tangente : } y = -\frac{1}{a^2}(x - a) + \frac{1}{a} = -\frac{x}{a^2} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} = \boxed{-\frac{x}{a^2} + \frac{2}{a}}.$$

b)

Avec l'axe des ordonnées ($x = 0$) : $y = \frac{2}{a}$, point $(0; \frac{2}{a})$. Avec l'axe des abscisses ($y = 0$) : $-\frac{x}{a^2} + \frac{2}{a} = 0 \iff x = 2a$, point $(2a; 0)$.

c)

Le triangle rectangle a pour côtés $2a$ (sur Ox) et $\frac{2}{a}$ (sur Oy). Son aire est $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{2}{a} = \frac{1}{2} \cdot 4 = \boxed{2}$, indépendante de a .

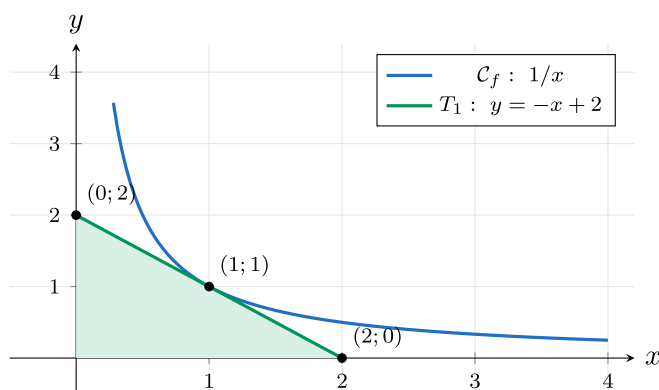


Illustration pour $a = 1$: le triangle a bien une aire de $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$.

Exo 11 11 – la tangente traverse la courbe

a)

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$, donc $f''(x) = 6x - 6$. $f''(x) = 0 \iff x = 1$, et f'' change de signe en 1 : c'est le **point d'inflexion**, d'abscisse $x = 1$ (avec $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$).

b)

$$f'(1) = 3 - 6 + 2 = -1. \text{ Tangente : } y = (x - 1) \cdot (-1) + 0 = \boxed{-x + 1}.$$

c)

$f(x) - (-x + 1) = x^3 - 3x^2 + 2x + x - 1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$. Ce cube est < 0 pour $x < 1$ et > 0 pour $x > 1$: la différence **change de signe** en 1, donc $\mathcal{C}_f$ passe d'un côté à l'autre de T : elle **traverse** sa tangente au point d'inflexion.

Exo 12 12 – tangentes issues d'un point donné

a)

$$f(a) = a^3 - 3a, f'(a) = 3a^2 - 3. \text{ Tangente : } y = (3a^2 - 3)(x - a) + a^3 - 3a = (3a^2 - 3)x - 3a^3 + 3a + a^3 - 3a = \boxed{(3a^2 - 3)x - 2a^3}.$$

b)

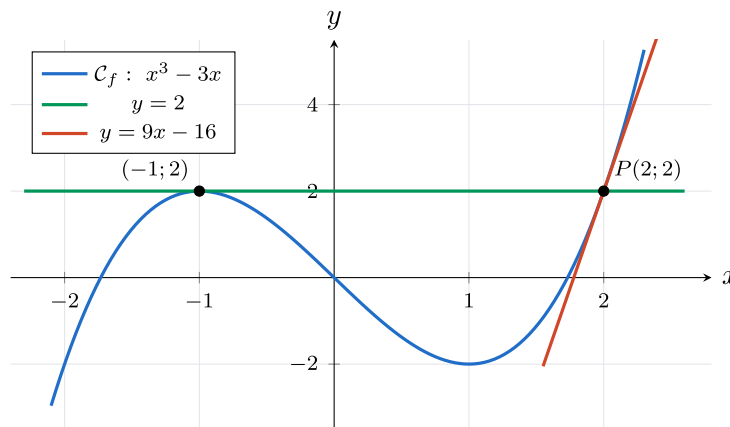
$$P(2; 2) \in T_a : 2 = (3a^2 - 3) \cdot 2 - 2a^3 = 6a^2 - 6 - 2a^3. \text{ En réorganisant : } 2a^3 - 6a^2 + 8 = 0, \text{ soit après division par 2 : } a^3 - 3a^2 + 4 = 0.$$

c)

$$a = -1 : (-1)^3 - 3(-1)^2 + 4 = -1 - 3 + 4 = 0. \text{ On factorise : } a^3 - 3a^2 + 4 = (a + 1)(a^2 - 4a + 4) = (a + 1)(a - 2)^2, \text{ d'où } a = -1 \text{ ou } a = 2 \text{ (double).}$$

$$\bullet a = -1 : \text{pente } 3 - 3 = 0, \text{ tangente } y = -2(-1)^3 = 2, \text{ soit } \boxed{y = 2} \text{ (contact en } (-1; 2)).$$

$$\bullet a = 2 : \text{pente } 12 - 3 = 9, \text{ tangente } y = 9x - 2 \cdot 8 = \boxed{9x - 16} \text{ (contact en } (2; 2) = P).$$



Exo 13 13 – une pente jamais atteinte

a)

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}. \text{ Tangente horizontale : } f'(x) = 0 \iff x^2 = 4 \iff x = 2 \text{ (car } x > 0). \text{ Point : } f(2) = 2 + 2 = 4, \text{ soit } (2; 4); \text{ tangente horizontale } \boxed{y = 4}.$$

b)

$$f(1) = 1 + 4 = 5 \text{ et } f'(1) = 1 - 4 = -3. \text{ Tangente : } y = (x - 1) \cdot (-3) + 5 = \boxed{-3x + 8}.$$

c)

$$\text{Parallèle à } y = x \text{ exigerait } f'(x) = 1, \text{ soit } 1 - \frac{4}{x^2} = 1 \iff -\frac{4}{x^2} = 0 : \text{ impossible. Pour tout } x > 0, f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} < 1 : \text{ la pente 1 n'est jamais atteinte (elle est seulement approchée quand } x \rightarrow +\infty).$$



Tous les exos cochés ? Passe au niveau réel.

+

Ce carnet est un extrait de notre bibliothèque d'entraînement — la suite se joue en ligne.

Sur simulationconcours.be

- ✓ Le même carnet en interactif, avec correction en un clic
- ✓ Les autres mécaniques de la fiche, niveau par niveau
- ✓ 3100 QCM type concours, corrigés et expliqués
- ✓ Les cours complets — gratuits — et les fiches de révision

Tous les jeudis : simulation du concours en ligne

En conditions réelles — chrono, QCM type concours et score immédiat.



Rejoins-nous sur simulationconcours.be

scanne le QR ou tape l'adresse — les cours complets sont gratuits