



simulationconcours.be



Mathématiques

Carnet d'entraînement



Variations extremums concavite

Dérivation · Mécanique 4 — des exercices calibrés concours, du plus simple au plus retors.

43 exercices

3 niveaux

corrigés détaillés

Comment bosser ce carnet

- ✓ Lis d'abord le tutoriel : la mécanique y est expliquée pas à pas
- ✓ Fais chaque niveau en entier **avant** d'ouvrir les corrigés
- ✓ Note à côté de chaque exo : réussi, hésité ou raté — et rejoue les ratés 48 h plus tard



simulationconcours.be

scanne & continue en ligne

Sommaire

- 1 Le tutoriel — la mécanique expliquée
- 2 Les exercices Facile x15 · Moyen x15 · Difficile x13
- 3 Les corrigés détaillés exercice par exercice

Le tutoriel

Ce document est un **carnet d'exercices** : on t'explique d'abord la mécanique, puis tu la travailles sur 43 exercices classés en trois niveaux. Les corrigés détaillés t'attendent en deuxième partie, après la page « Corrigés » — pas avant de l'avoir mérité.

 **À RETENIR** *le signe des dérivées raconte toute l'histoire de la courbe*

Signe de f' $\iff$ variations.

- $f'(x) > 0$ sur un intervalle $\Rightarrow f$ **croissante** ($\nearrow$).
- $f'(x) < 0$ sur un intervalle $\Rightarrow f$ **décroissante** ($\searrow$).
- f' s'annule *en changeant de signe* $\Rightarrow$ **extremum** : + puis – = **maximum** ; – puis + = **minimum**.

Signe de f'' $\iff$ concavité.

- $f''(x) > 0 \Rightarrow$ courbe **convexe** (concave vers le haut, « bol » $\cup$).
- $f''(x) < 0 \Rightarrow$ courbe **concave** (concave vers le bas, « cloche » $\cap$).
- f'' s'annule *en changeant de signe* $\Rightarrow$ **point d'inflexion**.

 **MÉTHODE** *dresser un tableau de variation en 6 étapes*

- 1 **Domaine** de f (valeurs interdites : dénominateur nul, $\ln$ négatif...).
- 2 Calculer la dérivée $f'(x)$.
- 3 Résoudre $f'(x) = 0$ pour trouver les valeurs critiques.
- 4 Étudier le **signe de f'** en **factorisant** (produit de facteurs, règle des signes).
- 5 Reporter le signe dans le tableau et tracer les **flèches** ($\nearrow$ si +, $\searrow$ si –).
- 6 Repérer les **extremums** là où f' change de signe et calculer leur valeur $f(x_0)$.

⚠ PIÈGE une dérivée qui s'annule ne donne pas toujours un extremum

Il faut un **changement de signe** de f' . Par exemple $f(x) = (3x - 1)^2$ ou $f(x) = x^3$: la dérivée s'annule mais reste du *même* signe de part et d'autre. Alors **aucun extremum** (pour x^3 , c'est un point d'inflexion à tangente horizontale).

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$f'(x)$	+	0 max	-
$f(x)$			

convexe concave

$f'' > 0$ (bol $\cup$) $f'' < 0$ (cloche $\cap$)

🔗 EXEMPLE minimum d'une parabole

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 3$ sur $\mathbb{R}$.

- Dérivée : $f'(x) = 2x - 4$.
- $f'(x) = 0 \iff x = 2$.
- Signe : $f'(x) < 0$ pour $x < 2$ ($\searrow$), $f'(x) > 0$ pour $x > 2$ ($\nearrow$).
- Donc f' passe de $-$ à $+$: **minimum** en $x = 2$, de valeur $f(2) = 4 - 8 + 3 = -1$.

Les exercices

FACILE 15 exercices

Exo 1 1

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Calculer f' , résoudre $f'(x) = 0$, puis en déduire la nature et la valeur de l'extremum.

Exo 2 2

Soit $f(x) = -x^2 + 2x$. Déterminer la nature de l'extremum de f .

Exo 3 3

Soit $f(x) = x^3 - 3x$. Trouver les racines de f' et étudier leur signe.

Exo 4 4

Soit $f(x) = x^4 - 2x^2$. Déterminer les racines de f' .

Exo 5 5

Soit $f(x) = x^3$. Montrer que $f'(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ et que f' s'annule en 0 **sans changer de signe**. Qu'en conclure sur l'existence d'un extremum ?

Exo 6 6

Lors d'un saut, la hauteur (en mètres) d'un plongeur au-dessus de l'eau vaut $h(t) = -5t^2 + 20t$, où t désigne le temps (en secondes) écoulé depuis l'impulsion. À quel instant la hauteur est-elle maximale, et quelle est cette hauteur maximale ?

Exo 7 7

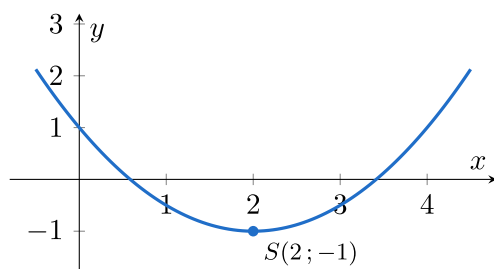
La dérivée d'une fonction f est $f'(x) = (x - 2)(x + 4)$. Sans connaître l'expression de f , déterminer le sens de variation de f et la nature de chacun de ses extremums.

Exo 8 8

Soit $f(x) = x^3 - 6x^2$. Calculer f'' et déterminer l'intervalle sur lequel la courbe de f est **convexe**.

Exo 9 9

La courbe ci-dessous représente une fonction f . Par **lecture graphique**, donner l'intervalle sur lequel f est décroissante, puis les coordonnées de son extremum en précisant sa nature.



Exo 10 10

On donne ci-dessous le tableau de signes de la dérivée f' d'une fonction f . En déduire le sens de variation de f ainsi que le nombre d'extremums.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Exo 11 11

Soit $f(x) = (2x - 4)^2$. Montrer que f' s'annule en $x = 2$, puis déterminer si f admet un extremum en ce point (préciser sa nature et sa valeur).

Exo 12 12

Soit $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$. Déterminer les abscisses des extremums de f et préciser, pour chacun, s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum, avec sa valeur.

Exo 13 13

Soit $f(x) = -x^2 + x + 2$. Calculer f'' et en déduire que la courbe de f est **concave** sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exo 14 14

Soit $f(x) = x^3 + 3x$. Montrer que $f'(x) > 0$ pour tout réel x , et en déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ sans aucun extremum.

Exo 15 15

Les deux courbes ci-dessous représentent deux fonctions. Pour chacune, indiquer si elle est convexe ou concave, puis préciser le signe de sa dérivée seconde f'' .



courbe C_1



courbe C_2

MOYEN 15 exercices

Exo 1 1

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Dresser le tableau de variation complet et donner les extremums avec leurs valeurs.

Exo 2 2

Soit $f(x) = 3x^3 - 3x^2 + x + 1$. Étudier les variations de f .

Exo 3 3

Soit $f(x) = \frac{x^5}{5} - 16x$. Combien f possède-t-elle d'extremums ?

Exo 4 4

Soit $f(x) = \frac{x}{x+1}$ (définie pour $x \neq -1$). Déterminer le sens de variation de f .

Exo 5 5

Soit $f(x) = x + \frac{1}{x}$ (définie pour $x \neq 0$). Déterminer les extremums de f .

Exo 6 6

Soit $f(x) = x e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$. Étudier les variations de f et déterminer son extremum (nature et valeur exacte).

Exo 7 7

Soit $f(x) = x - \ln x$ définie sur $]0, +\infty[$. Dresser le tableau de variation et donner l'extremum de f .

Exo 8 8

Soit $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$, puis étudier les variations de f et donner son extremum.

Exo 9 9

Soit $f(x) = (x-1)^2(x+2)$. Déterminer les extremums de f (abscisses, nature et valeurs).

Exo 10 10

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$. Après avoir justifié que f est définie sur $\mathbb{R}$, déterminer le minimum de f .

Exo 11 11

Parmi tous les rectangles de périmètre 20 (unités de longueur), on cherche celui d'aire maximale. En notant x la longueur d'un côté, exprimer l'aire $A(x)$, puis déterminer les dimensions du rectangle d'aire maximale.

Exo 12 12

Soit $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ (définie pour $x \neq 1$). Étudier le sens de variation de f et préciser si elle admet un extremum.

Exo 13 13

Soit $f(x) = x^4 - 4x^3$. Déterminer les points critiques de f , puis montrer que f ne possède qu'un **seul** extremum (préciser lequel).

Exo 14 14

Soit $f(x) = x^2 e^x$ sur $\mathbb{R}$. Étudier les variations de f et donner ses deux extremums (nature et valeur exacte).

Exo 15 15

Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

- 1 Dresser le tableau de variation et donner les extremums.
- 2 Calculer f'' , étudier la concavité et déterminer le point d'inflexion.

DIFFICILE 13 exercices

Exo 1 1

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

- 1 Calculer f' et dresser le tableau de variation.
- 2 Calculer f'' et étudier la concavité.
- 3 Justifier que $x = 1$ est un point d'inflexion et calculer $f(1)$.

Exo 2 2

Soit $f(x) = x^4 - 6x^2$.

- 1 Calculer $f'(x) = 4x(x^2 - 3)$ et étudier les variations.
- 2 Calculer $f''(x) = 12(x^2 - 1)$.
- 3 Déterminer les points d'inflexion et préciser la concavité (haut / bas / haut).

Exo 3 3

Étude complète de $f(x) = x - 3 \ln |x + 2|$.

- 1 Déterminer le domaine de définition de f .
- 2 Montrer que $f'(x) = \frac{x-1}{x+2}$.

- 3 Dresser le tableau de signes de f' et en déduire les variations (préciser l'extremum local).
- 4 Calculer $f''(x)$ et en déduire la concavité. Y a-t-il un point d'inflexion ?

Exo 4 4

Étude de $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

- 1 Donner le domaine de définition de f .
- 2 Montrer que $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.
- 3 Dresser le tableau de variation et donner les extremums locaux (nature et valeurs).
- 4 Montrer que $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$, en déduire la concavité ; la courbe possède-t-elle un point d'inflexion ?

Exo 5 5

Étude de $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

- 1 Montrer que $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$.
- 2 Étudier le signe de f' et en déduire l'extremum de f (nature et valeur).
- 3 Montrer que $f''(x) = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$ et déterminer l'abscisse du point d'inflexion.

Exo 6 6

On dispose d'une plaque carrée de côté 12 cm. On découpe un carré de côté x à chaque coin, puis on relève les bords pour former une boîte ouverte.

- 1 Exprimer le volume $V(x)$ de la boîte et préciser l'intervalle des valeurs de x .
- 2 Calculer $V'(x)$ et le factoriser.
- 3 Déterminer la valeur de x qui rend le volume maximal, ainsi que ce volume maximal.

Exo 7 7

Soit m un réel et $f(x) = x^3 - 3mx$.

a)

Calculer $f'(x)$.

b)

Discuter, selon les valeurs de m , le signe de f' et les variations de f .

c)

En déduire pour quelles valeurs de m la fonction f admet exactement deux extremums.

Exo 8

Soit $f(x) = (x^2 - 1)^2$.

- 1 Montrer que $f'(x) = 4x(x - 1)(x + 1)$ et déterminer les extremums (abscisses, nature, valeurs).
- 2 Calculer $f''(x)$ et déterminer les abscisses des points d'inflexion.
- 3 Résumer la concavité de la courbe sur chaque intervalle.

Exo 9

Soit $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$.

- 1 Dresser le tableau de variation et donner les extremums.
- 2 Calculer f'' et déterminer les coordonnées du point d'inflexion.
- 3 Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'inflexion.

Exo 10

Étude de $f(x) = x^2 - 8 \ln x$ sur $]0, +\infty[$.

- 1 Déterminer le domaine puis montrer que $f'(x) = \frac{2(x-2)(x+2)}{x}$.
- 2 Dresser le tableau de variation et donner le minimum de f (valeur exacte).
- 3 Calculer $f''(x)$ et préciser la concavité. Y a-t-il un point d'inflexion ?

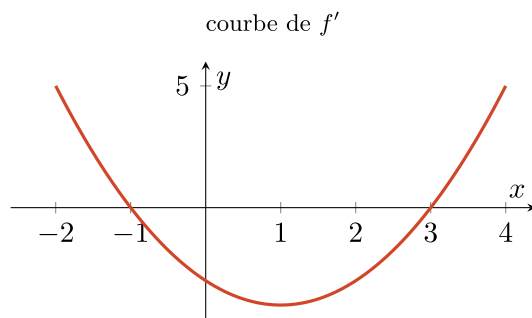
Exo 11

Soit $f(x) = (x^2 - 2x) e^x$.

- 1 Montrer que $f'(x) = (x^2 - 2) e^x$ et déterminer les abscisses et la nature des extremums.
- 2 Montrer que $f''(x) = (x^2 + 2x - 2) e^x$.
- 3 En déduire les abscisses des points d'inflexion.

Exo 12

La courbe ci-dessous est celle de la **dérivée** f' d'une fonction f .



- 1 Lire les valeurs de x pour lesquelles $f'(x) = 0$.
- 2 En déduire le signe de f' , puis les variations de f .
- 3 Préciser la nature des extremums de f .

Exo 13 13

Soit $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$, où a et b sont deux réels.

- 1 Exprimer $f'(x)$ et $f''(x)$ en fonction de a et b .
- 2 Déterminer a et b sachant que f admet un extremum local en $x = -1$ et un point d'inflexion en $x = 1$.
- 3 Préciser alors la nature de l'extremum en $x = -1$ et sa valeur.



DEUXIÈME PARTIE

Corrigés

Chaque exercice repris pas à pas, niveau par niveau.
Compare ta démarche, pas seulement ton résultat.





Une seconde – avant d'ouvrir le corrigé...



Si ce carnet t'aide, rends-nous la pareille : parle de simulationconcours.be à quelqu'un qui prépare le concours. C'est comme ça qu'on peut continuer.

Ce qu'on a préparé pour toi

- ✓ Ce carnet en interactif, avec correction en un clic
- ✓ Les cours complets, chapitre par chapitre – gratuits
- ✓ 3100 QCM type concours, corrigés et expliqués
- ✓ Des fiches de révision à imprimer

Tous les jeudis : simulation du concours en ligne

En conditions réelles – chrono, QCM type concours et score immédiat.



Rejoins-nous sur simulationconcours.be

scanne le QR ou tape l'adresse – puis reviens vérifier tes réponses

Les corrigés

FACILE 15 exercices

Exo 1 1

$$f'(x) = 2x - 4. f'(x) = 0 \iff 2x - 4 = 0 \iff x = 2.$$

Signe : $f'(x) = 2(x - 2)$ est du signe de $x - 2$: négatif avant 2, positif après.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

f' passe de - à + : **minimum** en $x = 2$, $f(2) = 4 - 8 + 3 = -1$.

Exo 2 2

$$f'(x) = -2x + 2 = -2(x - 1). f'(x) = 0 \iff x = 1.$$

Signe de $-2(x - 1)$: positif avant 1, négatif après.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-

f' passe de + à - : **maximum** en $x = 1$, $f(1) = -1 + 2 = 1$.

Exo 3 3

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1). \text{ Racines : } x = -1 \text{ et } x = 1.$$

Signe du produit $(x - 1)(x + 1)$ (parabole $\cup$) : positif à l'extérieur, négatif entre -1 et 1.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

f' change de signe en -1 (+ $\rightarrow$ - : **maximum**) et en 1 (- $\rightarrow$ + : **minimum**).

Exo 4 4

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x - 1)(x + 1). \text{ Racines : } x = -1, x = 0, x = 1.$$

Règle des signes du produit de trois facteurs (change de signe à chaque racine simple) :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Trois valeurs critiques, avec changement de signe à chacune : minimum en -1, maximum en 0, minimum en 1.

Exo 5 5

$f'(x) = 3x^2$. Comme un carré, $x^2 \geq 0$, donc $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ pour tout x : f est croissante partout. De plus $f'(x) = 0 \iff x = 0$, mais f' reste **positive** de part et d'autre de 0 (pas de changement de signe).

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+

Pas de changement de signe $\Rightarrow$ **aucun extremum**. En $x = 0$ la tangente est horizontale mais la courbe traverse : c'est un **point d'inflexion à tangente horizontale**.

Exo 6 6

$h'(t) = -10t + 20 = -10(t - 2)$. $h'(t) = 0 \iff t = 2$.

Signe : $h'(t) > 0$ pour $t < 2$ (la hauteur augmente, $\nearrow$), $h'(t) < 0$ pour $t > 2$ ($\searrow$).

t	0	2	$+\infty$
$h'(t)$	+	0	-

h' passe de $+$ à $-$: **maximum** à l'instant $t = 2$ s, de valeur $h(2) = -20 + 40 = \mathbf{20}$ mètres.

Exo 7 7

Le produit $(x - 2)(x + 4)$ est une parabole tournée vers le haut ($\smile$), de racines -4 et 2 : positif à l'extérieur de $[-4, 2]$, négatif entre.

x	$-\infty$	-4	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

f est croissante sur $]-\infty, -4]$, décroissante sur $[-4, 2]$, croissante sur $[2, +\infty[$. En $x = -4$ ($+$ $\rightarrow$ $-$) : **maximum** local ; en $x = 2$ ($-$ $\rightarrow$ $+$) : **minimum** local. (On ne peut pas calculer les valeurs sans connaître f .)

Exo 8 8

$f'(x) = 3x^2 - 12x$, puis $f''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2)$. $f''(x) = 0 \iff x = 2$.

$f''(x) > 0 \iff x > 2$: la courbe est **convexe** sur $]2, +\infty[$ (et concave sur $]-\infty, 2[$).

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

Exo 9 9

La courbe descend jusqu'au point le plus bas puis remonte : elle est **décroissante sur $]-\infty, 2]$** et croissante sur $[2, +\infty[$. Le point le plus bas est le sommet $S(2; -1)$: c'est un **minimum**, atteint en $x = 2$, de valeur -1 .

Exo 10 10

On lit le signe de f' et on en déduit les flèches : $-$ donne $\searrow$, $+$ donne $\nearrow$.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
f					

f décroît, puis croît, puis décroît : **minimum** en $x = -1$ ($- \rightarrow +$) et **maximum** en $x = 3$ ($+ \rightarrow -$). Il y a donc **2 extremums**.

Exo 11 11

Dérivée d'un carré : $f'(x) = 2(2x - 4) \cdot 2 = 8(x - 2)$. $f'(x) = 0 \iff x = 2$.

Signe de $8(x - 2)$: négatif avant 2, positif après — f' **change** bien de signe.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

f' passe de $-$ à $+$: f admet un **minimum** en $x = 2$, de valeur $f(2) = 0$.

Exo 12 12

$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x - 1)(x - 2)$. Racines 1 et 2.

Signe du produit $(x - 1)(x - 2)$ ($\smile$) : positif à l'extérieur de $[1, 2]$, négatif entre.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f					

Maximum en $x = 1$: $f(1) = 2 - 9 + 12 = 5$; **minimum** en $x = 2$: $f(2) = 16 - 36 + 24 = 4$.

Exo 13 13

$f'(x) = -2x + 1$, puis $f''(x) = -2$. $f''(x) = -2 < 0$ pour tout x .

La dérivée seconde est **strictement négative partout** : la courbe est **concave sur $\mathbb{R}$** tout entier (allure de cloche $\smile$), sans point d'inflexion.

Exo 14 14

$f'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1)$. Or $x^2 \geq 0$ donc $x^2 + 1 \geq 1 > 0$: $f'(x) > 0$ pour tout réel x .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	

f' ne s'annule jamais et reste positive : f est **strictement croissante sur $\mathbb{R}$** , **aucun extremum**.

Exo 15 15

$\mathcal{C}_1$ a la forme d'un **bol** $\cup$ (creux vers le haut) : elle est **convexe**, donc $f'' > 0$.

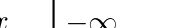
$\mathcal{C}_2$ a la forme d'une **cloche** $\cap$ (bosse vers le haut) : elle est **concave**, donc $f'' < 0$.

MOYEN 15 exercices

Exo 1 1

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2). f'(x) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 2.$$

Signe du produit $x(x - 2)$ (parabole $\cup$) : + à l'extérieur de $[0, 2]$, - entre. Valeurs : $f(0) = 1, f(2) = 8 - 12 + 1 = -3$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f					

Maximum local $f(0) = 1$ en $x = 0$; **minimum** local $f(2) = -3$ en $x = 2$.

Exo 2 2

$$f'(x) = 9x^2 - 6x + 1. \text{ On reconnaît une identité remarquable : } f'(x) = (3x - 1)^2.$$

Un carré est toujours ≥ 0 : $f'(x) \geq 0$, et $f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{3}$ (racine double). En $\frac{1}{3}$, f' **ne change pas de signe** (reste +).

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
f			

f est **strictement croissante sur $\mathbb{R}$** , avec une tangente horizontale en $x = \frac{1}{3}$: **aucun extremum** (point d'inflexion à tangente horizontale).

Exo 3 3

$$f'(x) = x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4).$$

Le facteur $x^2 + 4 > 0$ toujours : le signe de f' est celui de $(x - 2)(x + 2)$ (parabole $\cup$). Racines : $x = -2$ et $x = 2$.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
f						

f' change de signe en -2 ($+$ $\rightarrow$ $-$: maximum) et en 2 ($-$ $\rightarrow$ $+$: minimum) : f possède exactement **2** extremums.

Exo 4 4

Quotient $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u = x, v = x + 1$:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x + 1) - x \cdot 1}{(x + 1)^2} = \frac{x + 1 - x}{(x + 1)^2} = \frac{1}{(x + 1)^2}.$$

Un carré au dénominateur : $f'(x) > 0$ pour tout $x \neq -1$. f' ne s'annule jamais.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+

f est **croissante** sur $] - \infty, -1[$ et sur $] - 1, +\infty[$ (double barre : valeur interdite), **aucun extremum**.

Exo 5 5

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}.$$

$x^2 > 0$: le signe de f' est celui de $(x - 1)(x + 1)$. Racines -1 et 1 ; 0 interdit.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
f		$\nearrow -2$				$\searrow 2$	$\nearrow$	

f' passe de $+$ à $-$ en -1 : **maximum** local $f(-1) = -1 - 1 = -2$.

f' passe de $-$ à $+$ en 1 : **minimum** local $f(1) = 1 + 1 = 2$.

Exo 6 6

Produit uv avec $u = x, v = e^{-x}$: $f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + x \cdot (-e^{-x}) = e^{-x}(1 - x)$.

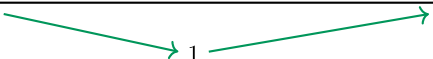
Comme $e^{-x} > 0$, le signe de f' est celui de $1 - x$: positif pour $x < 1$, négatif pour $x > 1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$\nearrow 1/e$		

f' passe de $+$ à $-$: **maximum** en $x = 1$, de valeur $f(1) = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Exo 7 7

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$. Sur $]0, +\infty[$ le dénominateur $x > 0$, donc le signe de f' est celui de $x - 1$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
f			

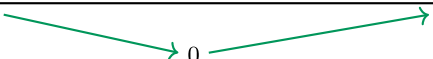
f' passe de — à + : **minimum** en $x = 1$, de valeur $f(1) = 1 - \ln 1 = 1$.

Exo 8 8

Quotient $\frac{u}{v}$ avec $u = x^2, v = x^2 + 1$:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

Le dénominateur $(x^2 + 1)^2 > 0$: le signe de f' est celui de $2x$, donc de x .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
f			

f' passe de — à + : **minimum** en $x = 0$, de valeur $f(0) = 0$ (la fonction est paire).

Exo 9 9

Produit : $f'(x) = 2(x - 1)(x + 2) + (x - 1)^2 = (x - 1)[2(x + 2) + (x - 1)] = (x - 1)(3x + 3) = 3(x - 1)(x + 1)$.

Racines -1 et 1 ; signe du produit ($\smile$) : + dehors, — dedans. Valeurs : $f(-1) = (-2)^2 \cdot 1 = 4, f(1) = 0 \cdot 3 = 0$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f					

Maximum local $f(-1) = 4$ en $x = -1$; **minimum** local $f(1) = 0$ en $x = 1$.

Exo 10 10

On écrit $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 \geq 1 > 0$: le radicande est toujours strictement positif, donc f est définie sur $\mathbb{R}$. Avec $g(x) = x^2 - 2x + 2$ et $g'(x) = 2x - 2$:

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}} = \frac{2x - 2}{2\sqrt{g(x)}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}.$$

Le dénominateur est > 0 : le signe de f' est celui de $x - 1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f			

f' passe de $-$ à $+$: **minimum** en $x = 1$, de valeur $f(1) = \sqrt{1} = 1$.

Exo 11 11

Périmètre $2(x + y) = 20 \Rightarrow y = 10 - x$, avec $0 < x < 10$. Aire :

$$A(x) = x(10 - x) = 10x - x^2, \quad A'(x) = 10 - 2x = -2(x - 5).$$

$A'(x) = 0 \iff x = 5$; $A' > 0$ avant 5, $A' < 0$ après : **maximum** en $x = 5$.

x	0	5	10
$A'(x)$	+	0	-
A			

Alors $y = 10 - 5 = 5$: le rectangle d'aire maximale est le **carré 5×5** , d'aire $A(5) = 25$.

Exo 12 12

$$\text{Quotient : } f'(x) = \frac{2(x-1)-(2x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x-2-2x-1}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}.$$

Le dénominateur $(x - 1)^2 > 0$, donc $f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0$ pour tout $x \neq 1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		-

f est **décroissante** sur $] - \infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ (double barre : valeur interdite), **aucun extremum**.

Exo 13 13

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$. Points critiques : $x = 0$ (racine double) et $x = 3$.

Comme $4x^2 \geq 0$, le signe de f' est celui de $x - 3$ (sauf en 0 où $f' = 0$) : $f' < 0$ sur $] - \infty, 3[$, $f' > 0$ sur $]3, +\infty[$.

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	-	0	+

En $x = 0$, f' **ne change pas de signe** ($-$ puis $-$) : **pas d'extremum**. En $x = 3$, f' passe de $-$ à $+$: **minimum**, $f(3) = 81 - 108 = -27$. Donc f possède **un seul** extremum.

Exo 14 14

$$f'(x) = 2x e^x + x^2 e^x = x e^x (x + 2) = x(x + 2) e^x.$$

Comme $e^x > 0$, le signe de f' est celui de $x(x + 2)$ ($\cap$), de racines -2 et 0 .

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
f			$\nearrow \frac{4}{e^2}$	$\searrow 0$		

Maximum local en $x = -2$: $f(-2) = 4e^{-2} = \frac{4}{e^2}$; **minimum** en $x = 0$: $f(0) = 0$.

Exo 15 15

a) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x - 1)(x - 3)$. Racines 1 et 3 , signe ($\cap$) : $+$ dehors, $-$ dedans. $f(1) = 1 - 6 + 9 = 4$, $f(3) = 27 - 54 + 27 = 0$.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
f			$\nearrow 4$	$\searrow 0$		

Maximum $f(1) = 4$ en $x = 1$; **minimum** $f(3) = 0$ en $x = 3$. **b)** $f''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2)$: $f'' < 0$ pour $x < 2$ (concave $\cap$), $f'' > 0$ pour $x > 2$ (convexe $\cap$).

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

f'' change de signe en $x = 2$: **point d'inflexion** $(2 ; f(2))$ avec $f(2) = 8 - 24 + 18 = 2$, soit le point $(2 ; 2)$.

DIFFICILE 13 exercices

Exo 1 1

a) $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$, racines 0 et 2 . Signe de $x(x - 2)$ ($\cap$) : $+$ dehors, $-$ dedans. $f(0) = 2$, $f(2) = 8 - 12 + 2 = -2$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f		$\nearrow 2$	$\searrow -2$		

Maximum $f(0) = 2$; **minimum** $f(2) = -2$. **b)** $f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$. $f''(x) < 0$ pour $x < 1$ (concave, cloche $\cap$) ; $f''(x) > 0$ pour $x > 1$ (convexe, bol $\cap$).

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	—	0	+

c) f'' change de signe en $x = 1 \Rightarrow$ **point d'inflexion**. $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$. L'inflexion est le point $(1, 0)$.

Exo 2 2

a) $f'(x) = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3) = 4x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$, racines $-\sqrt{3}$, 0, $\sqrt{3}$. Trois racines simples : f' change de signe à chacune. $f(0) = 0$, $f(\pm\sqrt{3}) = 9 - 18 = -9$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f		$\swarrow$	$\searrow$	$\swarrow$	$\searrow$			

Minimums en $\pm\sqrt{3}$ ($f = -9$), maximum local en 0 ($f = 0$). b) $f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1) = 12(x - 1)(x + 1)$, racines -1 et 1. c) Signe de $(x - 1)(x + 1)$ ($\smile$):

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

f'' change de signe en -1 et en 1 : **deux points d'inflexion**, en $x = -1$ et $x = 1$ (avec $f(\pm 1) = 1 - 6 = -5$). Concavité : **vers le haut** ($x < -1$), **vers le bas** ($-1 < x < 1$), **vers le haut** ($x > 1$).

Exo 3 3

a) $\ln|x + 2|$ exige $x + 2 \neq 0$, soit $x \neq -2$. Domaine : $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. b) $(\ln|x + 2|)' = \frac{1}{x+2}$, donc

$$f'(x) = 1 - \frac{3}{x+2} = \frac{(x+2) - 3}{x+2} = \frac{x-1}{x+2}.$$

c) Signe de $\frac{x-1}{x+2}$: numérateur nul en 1, dénominateur nul (interdit) en -2 . Règle des signes du quotient :

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$ $	$-$	0	$+$
f	$\swarrow$		$\searrow$	$\min$	$\nearrow$

(Double barre en -2 : valeur interdite.) Sur $] -2, 1[$ f décroît, sur $]1, +\infty[$ elle croît : f' passe de $-$ à $+$ en $x = 1 \Rightarrow$ **minimum local** en $x = 1$, $f(1) = 1 - 3 \ln 3$. d) $f'(x) = \frac{x-1}{x+2}$, dérivée du quotient : $\frac{1 \cdot (x+2) - (x-1) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2}$. Donc $f''(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$ sur tout le domaine : **concavité toujours vers le haut** (convexe). f'' ne s'annule jamais et ne change pas de signe : **aucun point d'inflexion**.

4

a) ln absent ; seule contrainte : $x - 1 \neq 0$. Domaine : $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. **b)** Quotient $\frac{u}{v}$, $u = x^2$, $v = x - 1$:

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

c) $(x - 1)^2 > 0$: le signe de f' est celui de $x(x - 2)$ ($\smile$, racines 0 et 2).

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$

En $x = 0 (+ \rightarrow -)$: **maximum** local $f(0) = 0$. En $x = 2 (- \rightarrow +)$: **minimum** local $f(2) = \frac{4}{1} = 4$. (Fait remarquable dû à l'asymptote $x = 1$: le maximum local 0 est *inférieur* au minimum local 4.) **d)** $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$; en dérivant ce quotient on obtient $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$. Le numérateur $2 > 0$: le signe de f'' est celui de $(x-1)^3$, donc de $x-1$. Ainsi $f'' < 0$ sur $] -\infty, 1[$ (concave) et $f'' > 0$ sur $]1, +\infty[$ (convexe). Le changement de concavité a lieu **en la valeur interdite $x = 1$** : f'' ne s'annule jamais, il n'y a **aucun point d'inflexion**.

5

a) Quotient $\frac{u}{v}$, $u = \ln x$, $v = x$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

b) $x^2 > 0$: le signe de f' est celui de $1 - \ln x$. Or $1 - \ln x > 0 \iff \ln x < 1 \iff x < e$.

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
f			$1/e$

f' passe de $+$ à $-$: **maximum** en $x = e$, de valeur $f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$. **c)** $f'(x) = (1 - \ln x)x^{-2}$; en dérivant : $f''(x) = \frac{-1}{x} \cdot x^{-2} + (1 - \ln x)(-2x^{-3}) = x^{-3}(-1 - 2(1 - \ln x)) = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$. Sur $x > 0$, $x^3 > 0$: f'' s'annule pour $2\ln x - 3 = 0 \iff \ln x = \frac{3}{2} \iff x = e^{3/2}$, en changeant de signe : **point d'inflexion** en $x = e^{3/2}$.

6

a) Le fond mesure $(12 - 2x) \times (12 - 2x)$ et la hauteur vaut x , donc $V(x) = x(12 - 2x)^2$, avec $0 < x < 6$ (il faut $12 - 2x > 0$). **b)** $V'(x) = (12 - 2x)^2 + x \cdot 2(12 - 2x)(-2) = (12 - 2x)[(12 - 2x) - 4x] = (12 - 2x)(12 - 6x)$, soit $V'(x) = 12(6 - x)(2 - x)$. **c)** Sur $]0, 6[$, $6 - x > 0$; le signe de V' est celui de $2 - x$: positif pour $x < 2$, négatif pour $x > 2$.

x	0	2	6
$V'(x)$	+	0	-
V			

Maximum en $x = 2$: $V(2) = 2 \cdot (12 - 4)^2 = 2 \cdot 64 = 128 \text{ cm}^3$.

Exo 7 7

a) $f'(x) = 3x^2 - 3m = 3(x^2 - m)$. **b)** Discussion selon m :

a)

Si $m < 0$: $x^2 - m > 0$ pour tout x , donc $f' > 0$: f est **strictement croissante sur $\mathbb{R}$** , sans extremum.

b)

Si $m = 0$: $f'(x) = 3x^2 \geq 0$, nulle seulement en 0 **sans changer de signe** : f croissante sur $\mathbb{R}$, point d'inflexion à tangente horizontale en 0, pas d'extremum.

c)

Si $m > 0$: $f'(x) = 3(x - \sqrt{m})(x + \sqrt{m})$, racines $\pm\sqrt{m}$. Signe ($\smile$) : + dehors, - dedans.

x	$-\infty$	$-\sqrt{m}$	$\sqrt{m}$	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

Alors f admet un **maximum** en $-\sqrt{m}$ et un **minimum** en $\sqrt{m}$. **c)** f admet exactement **deux extremums si et seulement si $m > 0$** .

Exo 8 8

a) $f'(x) = 2(x^2 - 1) \cdot 2x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x - 1)(x + 1)$, racines $-1, 0, 1$. Trois racines simples : f' change de signe à chacune. $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$, $f(1) = 0$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f								

Minimums en $x = \pm 1$ ($f = 0$) et **maximum** local en $x = 0$ ($f = 1$). **b)** $f''(x) = 12x^2 - 4 = 4(3x^2 - 1)$, qui s'annule en $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ (en changeant de signe) : **deux points d'inflexion**, d'ordonnée $f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 = \frac{4}{9}$. **c)** $f'' > 0$ (convexe) sur $\left]-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right[$, $f'' < 0$ (concave) sur $\left]-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right[$, $f'' > 0$ (convexe) sur $\left]\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$.

Exo 9 9

a) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x - 2)(x + 1)$, racines -1 et 2 . Signe ($\smile$): $+$ dehors, $-$ dedans. $f(-1) = -2 - 3 + 12 = 7$, $f(2) = 16 - 12 - 24 = -20$.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
f			7		-20	

Maximum $f(-1) = 7$; **minimum** $f(2) = -20$. **b)** $f''(x) = 12x - 6 = 6(2x - 1)$, nulle en $x = \frac{1}{2}$ (changement de signe): **point d'inflexion** d'abscisse $\frac{1}{2}$, avec $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - 6 = -\frac{13}{2}$, soit le point $(\frac{1}{2}; -\frac{13}{2})$. **c)** Pente au point d'inflexion: $f'(\frac{1}{2}) = 6 \cdot \frac{1}{4} - 6 \cdot \frac{1}{2} - 12 = \frac{3}{2} - 3 - 12 = -\frac{27}{2}$. Tangente: $y = -\frac{27}{2}(x - \frac{1}{2}) - \frac{13}{2} = -\frac{27}{2}x + \frac{1}{4}$.

Exo 10 10

a) $\ln x$ exige $x > 0$: domaine $]0, +\infty[$. $f'(x) = 2x - \frac{8}{x} = \frac{2x^2 - 8}{x} = \frac{2(x^2 - 4)}{x} = \frac{2(x-2)(x+2)}{x}$. **b)** Sur $x > 0$: $x > 0$ et $x + 2 > 0$, donc le signe de f' est celui de $x - 2$.

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f			

f' passe de $-$ à $+$: **minimum** en $x = 2$, de valeur $f(2) = 4 - 8 \ln 2$. **c)** $f''(x) = 2 + \frac{8}{x^2} > 0$ sur tout le domaine: la courbe est **convexe** partout. f'' ne s'annule jamais: **aucun point d'inflexion**.

Exo 11 11

a) $f'(x) = (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x)e^x = e^x(x^2 - 2x + 2x - 2) = (x^2 - 2)e^x$. Comme $e^x > 0$, le signe de f' est celui de $x^2 - 2$ ($\smile$), de racines $\pm\sqrt{2}$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Maximum local en $x = -\sqrt{2}$ ($f(-\sqrt{2}) = (2 + 2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}$) et **minimum** en $x = \sqrt{2}$ ($f(\sqrt{2}) = (2 - 2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}$). **b)** $f''(x) = 2xe^x + (x^2 - 2)e^x = (x^2 + 2x - 2)e^x$. **c)** $e^x > 0$: f'' s'annule quand $x^2 + 2x - 2 = 0$, soit $x = -1 \pm \sqrt{3}$ (discriminant $4 + 8 = 12$), en changeant de signe: **deux points d'inflexion**, d'abscisses $-1 - \sqrt{3}$ et $-1 + \sqrt{3}$.

Exo 12 12

a) La courbe de f' coupe l'axe des abscisses en $x = -1$ et $x = 3$: $f'(x) = 0$ pour $x = -1$ et $x = 3$. **b)** C'est une parabole tournée vers le haut: $f' > 0$ à l'extérieur de $[-1, 3]$ et $f' < 0$ à l'intérieur. Donc f est

croissante sur $] -\infty, -1]$, décroissante sur $[-1, 3]$, croissante sur $[3, +\infty[$.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f					

c) f' passe de $+$ à $-$ en $x = -1$: **maximum** local ; f' passe de $-$ à $+$ en $x = 3$: **minimum** local.

Exo 13 13

a) $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ et $f''(x) = 6x + 2a$. b) Point d'inflexion en $x = 1 \Rightarrow f''(1) = 0 : 6 + 2a = 0 \Rightarrow a = -3$.

Extremum en $x = -1 \Rightarrow f'(-1) = 0 : 3 - 2a + b = 0 \Rightarrow 3 + 6 + b = 0 \Rightarrow b = -9$. Donc

$a = -3, b = -9$ et $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$. c) $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x - 3)(x + 1)$: signe ($\smile$), $+$ dehors, $-$ dedans. En $x = -1$, f' passe de $+$ à $-$: c'est un **maximum** local, de valeur $f(-1) = -1 - 3 + 9 + 1 = 6$.



Tous les exos cochés ? Passe au niveau réel.

+

Ce carnet est un extrait de notre bibliothèque d'entraînement — la suite se joue en ligne.

Sur simulationconcours.be

- ✓ Le même carnet en interactif, avec correction en un clic
- ✓ Les autres mécaniques de la fiche, niveau par niveau
- ✓ 3100 QCM type concours, corrigés et expliqués
- ✓ Les cours complets — gratuits — et les fiches de révision

Tous les jeudis : simulation du concours en ligne

En conditions réelles — chrono, QCM type concours et score immédiat.



Rejoins-nous sur simulationconcours.be

scanne le QR ou tape l'adresse — les cours complets sont gratuits