



simulationconcours.be



Mathématiques

Carnet d'entraînement



Intégration par parties

Intégrale d'une fonction continue · Mécanique 2 — des exercices calibrés concours, du plus simple au plus retors.

44 exercices

3 niveaux

corrigés détaillés

Comment bosser ce carnet

- ✓ Lis d'abord le tutoriel : la mécanique y est expliquée pas à pas
- ✓ Fais chaque niveau en entier **avant** d'ouvrir les corrigés
- ✓ Note à côté de chaque exo : réussi, hésité ou raté — et rejoue les ratés 48 h plus tard



simulationconcours.be

scanne & continue en ligne

Sommaire

- 1 Le tutoriel — la mécanique expliquée
- 2 Les exercices Facile x15 · Moyen x15 · Difficile x14
- 3 Les corrigés détaillés exercice par exercice

Le tutoriel

Ce document est un **carnet d'exercices** : on t'explique d'abord la mécanique, puis tu la travailles sur 44 exercices classés en trois niveaux. Les corrigés détaillés t'attendent en deuxième partie, après la page « Corrigés » — pas avant de l'avoir mérité.

*Tutoriel — L'intégration par parties (IPP)

Certaines fonctions n'ont *aucune* primitive dans le formulaire du Thème 1 : $x e^x$, $x \cos x$, $\ln x$, $\arctan x$... Ce sont des **produits** (ou des fonctions « isolées » comme $\ln x$) que l'on intègre grâce à une seule technique universelle : l'**intégration par parties**. Elle n'est rien d'autre que la dérivée d'un produit lue à l'envers.

🔗 L'ESSENTIEL la formule et d'où elle vient

On part de la dérivée d'un produit : $(UV)' = U'V + UV'$. En passant aux différentielles puis en intégrant, $\int d(UV) = \int V dU + \int U dV$, c'est-à-dire $UV = \int V dU + \int U dV$. En isolant la deuxième intégrale :

$$\int U dV = UV - \int V dU.$$

On choisit U (qu'on va **dérivé**) et V' (qu'on va **intégrer**, avec $dV = V' dx$). Le pari : que la nouvelle intégrale $\int V dU$ soit *plus simple* que celle de départ.

Comment choisir U et V' ?

Tout le succès tient au bon choix. On prend pour U (la fonction que l'on dérive) celle qui apparaît le plus à **gauche** dans l'ordre de priorité suivant — retenu par le mnémo **« L.I.A.T.E. »** :

$$\underbrace{\text{L}}_{\ln, \log} > \underbrace{\text{I}}_{\arcsin, \arctan} > \underbrace{\text{A}}_{x^n, \text{polynômes}} > \underbrace{\text{T}}_{\sin, \cos} > \underbrace{\text{E}}_{e^x, a^x}.$$

Pourquoi cet ordre ? Un polynôme *dérivé* perd un degré (et finit par disparaître) ; un $\ln$ ou un $\arctan$ dérivé devient une fraction algébrique bien plus commode ; à l'inverse, $\sin$, $\cos$, e^x s'*intègrent* sans se compliquer,

on les met donc en V' .

☞ **MÉTHODE** dérouler une IPP en 4 gestes

- 1 **Choisir** U (règle L.I.A.T.E.) et V' (tout le reste) ; calculer U' (donc $dU = U' dx$) et $V = \int V' dx$.
- 2 **Appliquer** $\int U dV = UV - \int V dU$.
- 3 **Simplifier** la nouvelle intégrale (parfois il faut une *deuxième* IPP, ou résoudre une équation en I).
- 4 **Vérifier** en dérivant le résultat : on doit retomber sur l'intégrande.

🔗 **EXEMPLE** le cas d'école : $\int x e^x dx$

Choix. $U = x$ (algébrique, à dériver) et $V' = e^x$ (exponentielle, à intégrer), donc $U' = 1$ et $V = e^x$.

$$\int x e^x dx = UV - \int V dU = x e^x - \int e^x \cdot 1 dx = x e^x - e^x + C = \boxed{(x - 1) e^x + C}.$$

Vérification. $[(x - 1)e^x]' = e^x + (x - 1)e^x = x e^x$. Le produit de départ est devenu l'intégrale immédiate $\int e^x dx$: c'est tout l'intérêt d'avoir dérivé x en 1.

🔗 **EXEMPLE** $\ln x$, qui n'a pas de primitive « directe »

On écrit $\ln x = \underbrace{1}_{V'} \cdot \underbrace{\ln x}_U$: ici $U = \ln x$ (priorité L !) et $V' = 1$, donc $U' = \frac{1}{x}$ et $V = x$.

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int 1 dx = \boxed{x \ln x - x + C}.$$

Vérification. $[x \ln x - x]' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x$.

① **REMARQUE** quand l'IPP « tourne en boucle »

Pour $I = \int e^x \sin x dx$, aucune IPP ne simplifie vraiment : deux IPP successives ramènent la même intégrale I . On obtient alors une *équation* du type $I = (\dots) - I$ que l'on **résout** pour trouver I . Reconnaître cette situation évite de tourner en rond (voir Difficile).

⚠ ATTENTION *deux pièges classiques*

- **Le signe** — de la formule $(-\int V \, dU)$ est oublié une fois sur deux : écrivez-le tout de suite.
- **Le mauvais choix** $U \leftrightarrow V'$ complique l'intégrale au lieu de la simplifier. En cas de doute, essayez ; si $\int V \, dU$ est *pire* que l'intégrale de départ, inversez les rôles.

Les exercices

FACILE 15 exercices**Exo 1** 1Calculer $\int x e^x dx$.**Exo 2** 2Calculer $\int x \cos x dx$.**Exo 3** 3Calculer $\int x \sin x dx$.**Exo 4** 4Calculer $\int x e^{-x} dx$.**Exo 5** 5Calculer $\int (x + 2) e^x dx$.**Exo 6** 6Calculer $\int (2x - 1) e^x dx$.**Exo 7** 7Calculer $\int (4 - x) e^x dx$.**Exo 8** 8Calculer $\int x \cos(2x) dx$.**Exo 9** 9Calculer $\int x \sin(3x) dx$.

Exo 10 10Calculer $\int (x - 1) \sin x \, dx$.**Exo 11** 11Calculer $\int (x + 1) \cos x \, dx$.**Exo 12** 12Calculer $\int (x + 3) e^{-x} \, dx$.**Exo 13** 13Calculer $\int x e^{x/2} \, dx$.**Exo 14** 14Calculer $\int (2x + 1) \sin x \, dx$.**Exo 15** 15Calculer $\int (2x + 1) e^{-x} \, dx$.**MOYEN** 15 exercices**Exo 1** 1Calculer $\int \ln x \, dx$ (sur $]0, +\infty[$). *Indication : écrire $\ln x = 1 \cdot \ln x$.***Exo 2** 2Calculer $\int x \ln x \, dx$ (sur $]0, +\infty[$).**Exo 3** 3Calculer $\int \arctan x \, dx$. *Indication : $U = \arctan x, V' = 1$.***Exo 4** 4Calculer $\int x e^{2x} \, dx$. *Attention à la primitive de e^{2x} .*

Exo 5 5

Calculer $\int x^2 e^x dx$ (deux IPP successives).

Exo 6 6

Calculer $\int x^2 \ln x dx$ (sur $]0, +\infty[$).

Exo 7 7

Calculer $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$ (sur $]0, +\infty[$).

Exo 8 8

Calculer $\int (\ln x)^2 dx$ (sur $]0, +\infty[$). *Indication : $U = (\ln x)^2, V' = 1$; on réutilise $\int \ln x dx$.*

Exo 9 9

Calculer $\int \arcsin x dx$ (sur $] -1, 1[$). *Indication : $U = \arcsin x, V' = 1$.*

Exo 10 10

Calculer $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$. *Rappel : une primitive de $1/\sin^2 x$ est $-\cot x$.*

Exo 11 11

Calculer $\int x 3^x dx$. *Rappel : $(3^x)' = 3^x \ln 3$, donc une primitive de 3^x est $3^x / \ln 3$.*

Exo 12 12

Calculer $\int x \arctan x dx$. *Indication : après l'IPP, écrire $\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$.*

Exo 13 13

Calculer $\int x^2 e^{-x} dx$ (deux IPP successives).

Exo 14 14

Calculer l'intégrale définie $\int_1^e \ln x dx$.

Exo 15 15

Calculer l'intégrale définie $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$.

DIFFICILE 14 exercices

Exo 1 1 – l'IPP qui « boucle »

On pose $I = \int e^x \sin x \, dx$ et $J = \int e^x \cos x \, dx$.

a)

En intégrant *deux fois* par parties (en gardant toujours $V' = e^x$), établir une relation entre I et J , puis une seconde entre J et I .

b)

En déduire la valeur de I , puis celle de J .

c)

Retrouver alors sans nouveau calcul $\int e^x (\sin x + \cos x) \, dx$, et interpréter le résultat.

Exo 2 2 – double IPP

Calculer $\int x^2 \cos x \, dx$ à l'aide de deux intégrations par parties successives.

Exo 3 3 – IPP sur un intervalle

Soit $A = \int_0^1 (x + 1) e^x \, dx$.

a)

Déterminer une primitive de $x \mapsto (x + 1)e^x$ par intégration par parties.

b)

En déduire la valeur exacte de A .

Exo 4 4 – une relation de récurrence

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $I_n = \int x^n e^x \, dx$.

a)

Par une IPP, montrer que pour tout $n \geq 1$: $I_n = x^n e^x - n I_{n-1}$.

b)

Sachant que $I_0 = e^x + C$, calculer successivement I_1 , I_2 et I_3 .

Exo 5 5 – deux intégrales couplées

On pose $I = \int e^{2x} \cos(3x) dx$ et $J = \int e^{2x} \sin(3x) dx$.

a)

En intégrant chacune *une fois* par parties (en gardant toujours $V' = e^{2x}$), établir deux relations reliant I et J .

b)

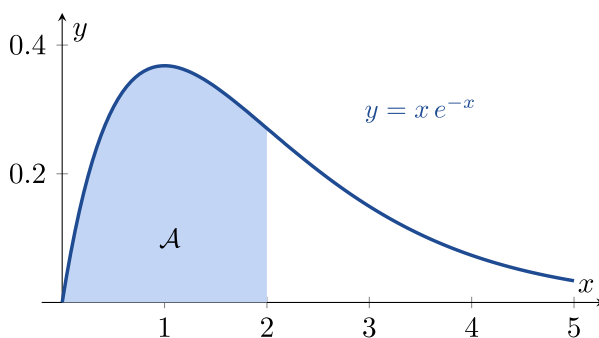
Résoudre le système obtenu et donner I et J .

c)

En déduire la valeur exacte de $\int_0^{\pi/3} e^{2x} \cos(3x) dx$.

Exo 6 6 – aire sous une courbe

Soit $f(x) = x e^{-x}$ définie sur $[0, +\infty[$. Sa courbe part de l'origine, culmine puis décroît vers 0.



a)

Déterminer, par une intégration par parties, une primitive F de f .

b)

Calculer l'aire $\mathcal{A}$ (en unités d'aire) du domaine grisé, compris entre la courbe et l'axe des abscisses pour $0 \leq x \leq 2$.

c)

L'aire totale sous la courbe sur $[0, +\infty[$ est $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x) dx$. Montrer qu'elle vaut 1 u.a..

Exo 7 7 – logarithme au carré $\times$ polynôme

Calculer $\int x(\ln x)^2 dx$ (sur $]0, +\infty[$). On pourra réutiliser $\int x \ln x dx$.

Exo 8 8 – récurrence pour $\int (\ln x)^n$

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $J_n = \int (\ln x)^n dx$ (sur $]0, +\infty[$), avec la convention $(\ln x)^0 = 1$.

a)

Par une IPP ($U = (\ln x)^n, V' = 1$), montrer que pour tout $n \geq 1 : J_n = x(\ln x)^n - n J_{n-1}$.

b)

Sachant que $J_0 = x + C$, calculer J_1, J_2 et J_3 .

Exo 9 9 – une IPP qui « boucle » déguisée

On pose $I = \int \cos(\ln x) dx$ et $J = \int \sin(\ln x) dx$ (sur $]0, +\infty[$).

a)

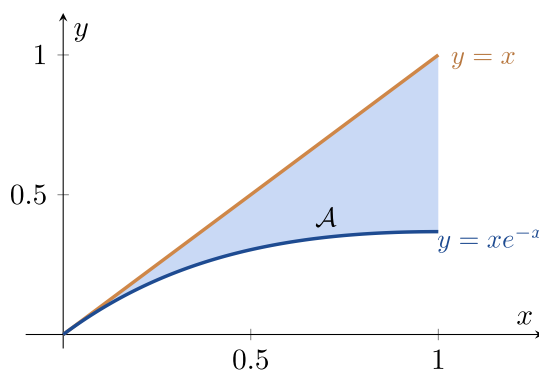
En prenant $V' = 1$ (donc $V = x$) dans chaque intégrale, établir deux relations reliant I et J .

b)

En déduire la valeur de I .

Exo 10 10 – aire entre deux courbes

On considère, sur $[0, 1]$, la droite $y = x$ et la courbe $y = x e^{-x}$.



a)

Justifier que, sur $[0, 1]$, la droite $y = x$ est au-dessus de la courbe $y = x e^{-x}$.

b)

Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine compris entre les deux courbes pour $0 \leq x \leq 1$.

Exo 11 11 – trois IPP successives

On veut calculer $\int x^3 e^{-x} dx$.

a)

Par une première IPP, ramener le calcul à celui de $\int x^2 e^{-x} dx$.

b)

En utilisant $\int x^2 e^{-x} dx = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C$, conclure.

c)

Vérifier le résultat en le dérivant.

Exo 12 12 – arctangente sur un intervalle

Soit $B = \int_0^1 \arctan x dx$.

a)

Rappeler une primitive de $\arctan x$ (obtenue par IPP).

b)

En déduire la valeur exacte de B .

Exo 13 13 – un travail mécanique

Une force variable de norme $F(x) = x \cos x$ (en newtons) s'exerce le long d'un axe, de $x = 0$ à $x = \frac{\pi}{2}$ (en mètres). Le travail correspondant est $W = \int_0^{\pi/2} x \cos x dx$. Calculer W .

Exo 14 14 – suite d'intégrales définies

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $K_n = \int_0^1 x^n e^x dx$.

a)

Par une IPP, montrer que pour tout $n \geq 1$: $K_n = e - n K_{n-1}$.

b)

Calculer K_0 , K_1 et K_2 .

c)

Montrer que pour tout $n \geq 0$: $\frac{1}{n+1} \leq K_n \leq \frac{e}{n+1}$, et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n$.



DEUXIÈME PARTIE

Corrigés

Chaque exercice repris pas à pas, niveau par niveau.
Compare ta démarche, pas seulement ton résultat.





Une seconde – avant d'ouvrir le corrigé...



Si ce carnet t'aide, rends-nous la pareille : parle de simulationconcours.be à quelqu'un qui prépare le concours. C'est comme ça qu'on peut continuer.

Ce qu'on a préparé pour toi

- ✓ Ce carnet en interactif, avec correction en un clic
- ✓ Les cours complets, chapitre par chapitre – gratuits
- ✓ 3100 QCM type concours, corrigés et expliqués
- ✓ Des fiches de révision à imprimer

Tous les jeudis : simulation du concours en ligne

En conditions réelles – chrono, QCM type concours et score immédiat.



Rejoins-nous sur simulationconcours.be

scanne le QR ou tape l'adresse – puis reviens vérifier tes réponses

Les corrigés

FACILE 15 exercices

Exo 1 1

$\int x e^x dx$. **Choix :** $U = x, V' = e^x$, donc $U' = 1, V = e^x$.

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x \cdot 1 dx = x e^x - e^x + C = \boxed{(x - 1) e^x + C.}$$

Vérif. $[(x - 1)e^x]' = e^x + (x - 1)e^x = x e^x$.

Exo 2 2

$\int x \cos x dx$. **Choix :** $U = x, V' = \cos x$, donc $U' = 1, V = \sin x$.

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x \cdot 1 dx = x \sin x - (-\cos x) + C = \boxed{x \sin x + \cos x + C.}$$

Vérif. $[x \sin x + \cos x]' = \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x$.

Exo 3 3

$\int x \sin x dx$. **Choix :** $U = x, V' = \sin x$, donc $U' = 1, V = -\cos x$.

$$\int x \sin x dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x) \cdot 1 dx = -x \cos x + \int \cos x dx = \boxed{-x \cos x + \sin x + C.}$$

Vérif. $[-x \cos x + \sin x]' = -\cos x + x \sin x + \cos x = x \sin x$.

Exo 4 4

$\int x e^{-x} dx$. **Choix :** $U = x, V' = e^{-x}$, donc $U' = 1, V = -e^{-x}$.

$$\int x e^{-x} dx = x(-e^{-x}) - \int (-e^{-x}) dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C = \boxed{-(x + 1) e^{-x} + C.}$$

Vérif. $[-(x + 1)e^{-x}]' = -e^{-x} - (x + 1)(-e^{-x}) = -e^{-x} + (x + 1)e^{-x} = x e^{-x}$.

Exo 5 5

$\int (x+2)e^x dx$. **Choix :** $U = x+2, V' = e^x$, donc $U' = 1, V = e^x$.

$$\int (x+2)e^x dx = (x+2)e^x - \int e^x dx = (x+2)e^x - e^x + C = \boxed{(x+1)e^x + C.}$$

Vérif. $[(x+1)e^x]' = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$.

Exo 6 6

$\int (2x-1)e^x dx$. **Choix :** $U = 2x-1, V' = e^x$, donc $U' = 2, V = e^x$.

$$\int (2x-1)e^x dx = (2x-1)e^x - \int 2e^x dx = (2x-1)e^x - 2e^x + C = \boxed{(2x-3)e^x + C.}$$

Vérif. $[(2x-3)e^x]' = 2e^x + (2x-3)e^x = (2x-1)e^x$.

Exo 7 7

$\int (4-x)e^x dx$. **Choix :** $U = 4-x, V' = e^x$, donc $U' = -1, V = e^x$.

$$\int (4-x)e^x dx = (4-x)e^x - \int (-1)e^x dx = (4-x)e^x + e^x + C = \boxed{(5-x)e^x + C.}$$

Vérif. $[(5-x)e^x]' = -e^x + (5-x)e^x = (4-x)e^x$.

Exo 8 8

$\int x \cos(2x) dx$. **Choix :** $U = x, V' = \cos(2x)$, donc $U' = 1, V = \frac{1}{2} \sin(2x)$.

$$\int x \cos(2x) dx = \frac{x}{2} \sin(2x) - \int \frac{1}{2} \sin(2x) dx = \boxed{\frac{x}{2} \sin(2x) + \frac{1}{4} \cos(2x) + C.}$$

Vérif. $[\frac{x}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x]' = \frac{1}{2} \sin 2x + x \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x = x \cos 2x$.

Exo 9 9

$\int x \sin(3x) dx$. **Choix :** $U = x, V' = \sin(3x)$, donc $U' = 1, V = -\frac{1}{3} \cos(3x)$.

$$\int x \sin(3x) \, dx = -\frac{x}{3} \cos(3x) + \int \frac{1}{3} \cos(3x) \, dx = \boxed{-\frac{x}{3} \cos(3x) + \frac{1}{9} \sin(3x) + C.}$$

Vérif. $\left[-\frac{x}{3} \cos 3x + \frac{1}{9} \sin 3x\right]' = -\frac{1}{3} \cos 3x + x \sin 3x + \frac{1}{3} \cos 3x = x \sin 3x.$

Exo 10 10

$\int (x-1) \sin x \, dx$. **Choix :** $U = x-1, V' = \sin x$, donc $U' = 1, V = -\cos x$.

$$\int (x-1) \sin x \, dx = -(x-1) \cos x + \int \cos x \, dx = \boxed{(1-x) \cos x + \sin x + C.}$$

Vérif. $\left[(1-x) \cos x + \sin x\right]' = -\cos x - (1-x) \sin x + \cos x = (x-1) \sin x.$

Exo 11 11

$\int (x+1) \cos x \, dx$. **Choix :** $U = x+1, V' = \cos x$, donc $U' = 1, V = \sin x$.

$$\int (x+1) \cos x \, dx = (x+1) \sin x - \int \sin x \, dx = \boxed{(x+1) \sin x + \cos x + C.}$$

Vérif. $\left[(x+1) \sin x + \cos x\right]' = \sin x + (x+1) \cos x - \sin x = (x+1) \cos x.$

Exo 12 12

$\int (x+3)e^{-x} \, dx$. **Choix :** $U = x+3, V' = e^{-x}$, donc $U' = 1, V = -e^{-x}$.

$$\int (x+3)e^{-x} \, dx = -(x+3)e^{-x} + \int e^{-x} \, dx = -(x+3)e^{-x} - e^{-x} + C = \boxed{-(x+4)e^{-x} + C.}$$

Vérif. $\left[-(x+4)e^{-x}\right]' = -e^{-x} + (x+4)e^{-x} = (x+3)e^{-x}.$

Exo 13 13

$\int x e^{x/2} \, dx$. **Choix :** $U = x, V' = e^{x/2}$, donc $U' = 1, V = 2e^{x/2}$.

$$\int x e^{x/2} \, dx = 2x e^{x/2} - \int 2e^{x/2} \, dx = 2x e^{x/2} - 4e^{x/2} + C = \boxed{2(x-2)e^{x/2} + C.}$$

Vérif. $\left[2(x-2)e^{x/2}\right]' = 2e^{x/2} + (x-2)e^{x/2} = x e^{x/2}.$

Exo 14 14

$\int (2x + 1) \sin x \, dx$. **Choix :** $U = 2x + 1, V' = \sin x$, donc $U' = 2, V = -\cos x$.

$$\int (2x + 1) \sin x \, dx = -(2x + 1) \cos x + \int 2 \cos x \, dx =$$

$$\boxed{-(2x + 1) \cos x + 2 \sin x + C.}$$

Vérif. $[-(2x + 1) \cos x + 2 \sin x]' = -2 \cos x + (2x + 1) \sin x + 2 \cos x = (2x + 1) \sin x$.

Exo 15 15

$\int (2x + 1)e^{-x} \, dx$. **Choix :** $U = 2x + 1, V' = e^{-x}$, donc $U' = 2, V = -e^{-x}$.

$$\int (2x + 1)e^{-x} \, dx = -(2x + 1)e^{-x} + \int 2e^{-x} \, dx = -(2x + 1)e^{-x} - 2e^{-x} + C =$$

$$\boxed{-(2x + 3)e^{-x} + C.}$$

Vérif. $[-(2x + 3)e^{-x}]' = -2e^{-x} + (2x + 3)e^{-x} = (2x + 1)e^{-x}$.

MOYEN 15 exercices

Exo 1 1

$\int \ln x \, dx$. On pose $U = \ln x, V' = 1$, donc $U' = \frac{1}{x}, V = x$.

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx = \boxed{x \ln x - x + C.}$$

Vérif. $[x \ln x - x]' = \ln x + 1 - 1 = \ln x$.

Exo 2 2

$\int x \ln x \, dx$. Règle L.I.A.T.E. : on dérive le $\ln$. $U = \ln x, V' = x$, donc $U' = \frac{1}{x}, V = \frac{x^2}{2}$.

$$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx = \boxed{\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.}$$

Vérif. $[\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}]' = x \ln x + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{x}{2} = x \ln x + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = x \ln x$.

Exo 3 3

$\int \arctan x \, dx$. On pose $U = \arctan x$, $V' = 1$, donc $U' = \frac{1}{1+x^2}$, $V = x$.

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx.$$

Pour la dernière intégrale, forme dW/W avec $W = 1 + x^2$, $dW = 2x \, dx$: $\int \frac{x \, dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$.

D'où

$$\boxed{\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.}$$

Vérif. $[x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)]' = \arctan x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1+x^2} = \arctan x$.

Exo 4 4

$\int x e^{2x} \, dx$. $U = x$, $V' = e^{2x}$, donc $U' = 1$, $V = \frac{1}{2} e^{2x}$.

$$\int x e^{2x} \, dx = x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} \, dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} e^{2x} + C = \boxed{\frac{2x-1}{4} e^{2x} + C.}$$

Vérif. $[\frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x}]' = \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{x}{2} \cdot 2e^{2x} - \frac{1}{4} \cdot 2e^{2x} = \frac{1}{2} e^{2x} + x e^{2x} - \frac{1}{2} e^{2x} = x e^{2x}$.

Exo 5 5

$\int x^2 e^x \, dx$. **1IPP** : $U = x^2$, $V' = e^x$ ($U' = 2x$, $V = e^x$) :

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - \int 2x e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx.$$

2IPP (déjà connue) : $\int x e^x \, dx = (x-1)e^x + C$. Donc

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2(x-1)e^x + C = \boxed{(x^2 - 2x + 2) e^x + C.}$$

Vérif. $[(x^2 - 2x + 2) e^x]' = (2x-2)e^x + (x^2 - 2x + 2)e^x = (x^2) e^x = x^2 e^x$.

Exo 6 6

$\int x^2 \ln x \, dx$. Règle L.I.A.T.E. : on dérive $\ln x$. $U = \ln x$, $V' = x^2$, donc $U' = \frac{1}{x}$, $V = \frac{x^3}{3}$.

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx = \boxed{\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C.}$$

Vérif. $\left[\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} \right]' = x^2 \ln x + \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{3} = x^2 \ln x.$

Exo 7 7

$\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx$. $U = \ln x$, $V' = x^{-2}$, donc $U' = \frac{1}{x}$, $V = -\frac{1}{x}$.

$$\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx = -\frac{\ln x}{x} - \int \left(-\frac{1}{x} \right) \cdot \frac{1}{x} \, dx = -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-2} \, dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C = \boxed{-\frac{\ln x + 1}{x} + C.}$$

Vérif. $\left[-\frac{\ln x + 1}{x} \right]' = -\frac{\frac{1}{x} \cdot x - (\ln x + 1)}{x^2} = -\frac{1 - \ln x - 1}{x^2} = \frac{\ln x}{x^2}.$

Exo 8 8

$\int (\ln x)^2 \, dx$. $U = (\ln x)^2$, $V' = 1$, donc $U' = \frac{2 \ln x}{x}$, $V = x$.

$$\int (\ln x)^2 \, dx = x(\ln x)^2 - \int x \cdot \frac{2 \ln x}{x} \, dx = x(\ln x)^2 - 2 \int \ln x \, dx.$$

Or $\int \ln x \, dx = x \ln x - x$, d'où

$$\boxed{\int (\ln x)^2 \, dx = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C.}$$

Vérif. $[x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x]' = (\ln x)^2 + 2 \ln x - 2 \ln x - 2 + 2 = (\ln x)^2.$

Exo 9 9

$\int \arcsin x \, dx$. $U = \arcsin x$, $V' = 1$, donc $U' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $V = x$.

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$$

Pour la dernière intégrale, $W = 1 - x^2$, $dW = -2x \, dx$: $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}$. D'où

$$\boxed{\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.}$$

Vérif. $[x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}]' = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x.$

Exo 10 10

$\int \frac{x}{\sin^2 x} \, dx$. $U = x$, $V' = \frac{1}{\sin^2 x}$, donc $U' = 1$, $V = -\cot x$.

$$\int \frac{x}{\sin^2 x} \, dx = -x \cot x + \int \cot x \, dx = -x \cot x + \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx =$$

$$\boxed{-x \cot x + \ln |\sin x| + C.}$$

Vérif. $[-x \cot x + \ln |\sin x|]' = -\cot x + \frac{x}{\sin^2 x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{x}{\sin^2 x}.$

Exo 11 11

$\int x 3^x \, dx$. $U = x$, $V' = 3^x$, donc $U' = 1$, $V = \frac{3^x}{\ln 3}$.

$$\int x 3^x \, dx = \frac{x 3^x}{\ln 3} - \int \frac{3^x}{\ln 3} \, dx = \frac{x 3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{(\ln 3)^2} + C = \boxed{\frac{3^x}{\ln 3} \left(x - \frac{1}{\ln 3} \right) + C.}$$

Vérif. $\left[\frac{x 3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{(\ln 3)^2} \right]' = \frac{3^x + x 3^x \ln 3}{\ln 3} - \frac{3^x \ln 3}{(\ln 3)^2} = \frac{3^x}{\ln 3} + x 3^x - \frac{3^x}{\ln 3} = x 3^x.$

Exo 12 12

$\int x \arctan x \, dx$. $U = \arctan x$, $V' = x$, donc $U' = \frac{1}{1+x^2}$, $V = \frac{x^2}{2}$.

$$\int x \arctan x \, dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx.$$

Avec $\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$, on a $\int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx = x - \arctan x$. D'où

$$\int x \arctan x \, dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2}(x - \arctan x) + C = \boxed{\frac{x^2 + 1}{2} \arctan x - \frac{x}{2} + C.}$$

Vérif. $\left[\frac{x^2+1}{2} \arctan x - \frac{x}{2} \right]' = x \arctan x + \frac{x^2+1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2} = x \arctan x.$

Exo 13 13

$\int x^2 e^{-x} \, dx$. **1 IPP**: $U = x^2, V' = e^{-x} (U' = 2x, V = -e^{-x})$:

$$\int x^2 e^{-x} \, dx = -x^2 e^{-x} + \int 2x e^{-x} \, dx = -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} \, dx.$$

2 IPP (niveau Facile): $\int x e^{-x} \, dx = -(x+1)e^{-x}$. Donc

$$\int x^2 e^{-x} \, dx = -x^2 e^{-x} - 2(x+1)e^{-x} + C = \boxed{-(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C.}$$

Vérif. $[-(x^2 + 2x + 2)e^{-x}]' = -(2x+2)e^{-x} + (x^2 + 2x + 2)e^{-x} = x^2 e^{-x}.$

Exo 14 14

$\int_1^e \ln x \, dx$. Une primitive de $\ln x$ est $x \ln x - x$. Par Newton-Leibniz :

$$\int_1^e \ln x \, dx = [x \ln x - x]_1^e = (e \cdot 1 - e) - (1 \cdot 0 - 1) = 0 - (-1) = \boxed{1.}$$

Exo 15 15

$\int_0^\pi x \sin x \, dx$. Une primitive de $x \sin x$ est $-x \cos x + \sin x$ (niveau Facile). Donc

$$\int_0^\pi x \sin x \, dx = [-x \cos x + \sin x]_0^\pi = (-\pi \cos \pi + \sin \pi) - (0) = \pi + 0 = \boxed{\pi.}$$

DIFFICILE

14 exercices

Exo 1 1 – l'IPP qui « boucle »

a)

On garde *toujours* $V' = e^x$ (donc $V = e^x$).

Calcul de I avec $U = \sin x$ ($U' = \cos x$):

$$I = \int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - J.$$

Calcul de J avec $U = \cos x$ ($U' = -\sin x$):

$$J = \int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) \, dx = e^x \cos x + I.$$

b)

On substitue la 2 relation dans la 1 :

$$I = e^x \sin x - (e^x \cos x + I) \implies 2I = e^x (\sin x - \cos x),$$

d'où $I = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$. Puis $J = e^x \cos x + I = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C$.

c)

Par linéarité, $\int e^x (\sin x + \cos x) \, dx = I + J = e^x \sin x + C$. **Interprétation :** on retrouve directement que $(e^x \sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x (\sin x + \cos x)$: l'intégrande était exactement une dérivée de produit.

Exo 2 2 – double IPP

$\int x^2 \cos x \, dx$. **1IPP :** $U = x^2, V' = \cos x$ ($U' = 2x, V = \sin x$):

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x \, dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx.$$

Or $\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \sin x$ (niveau Facile). Donc

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x - 2(-x \cos x + \sin x) + C =$$

$$\boxed{x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.}$$

Vérif. $[x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x]' = 2x \sin x + x^2 \cos x + 2 \cos x - 2x \sin x - 2 \cos x = x^2 \cos x.$

Exo 3 3 – IPP sur un intervalle

a)

$\int (x+1)e^x \, dx$ avec $U = x+1, V' = e^x (U' = 1, V = e^x)$:

$$\int (x+1)e^x \, dx = (x+1)e^x - \int e^x \, dx = (x+1)e^x - e^x + C = x e^x + C.$$

Une primitive est donc $F(x) = x e^x$. **Vérif.** $(x e^x)' = e^x + x e^x = (x+1)e^x.$

b)

Par Newton-Leibniz,

$$A = \int_0^1 (x+1)e^x \, dx = [x e^x]_0^1 = 1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 = \boxed{e.}$$

Exo 4 4 – une relation de récurrence

a)

Pour $n \geq 1$, IPP avec $U = x^n, V' = e^x (U' = n x^{n-1}, V = e^x)$:

$$I_n = \int x^n e^x \, dx = x^n e^x - \int n x^{n-1} e^x \, dx = \boxed{x^n e^x - n I_{n-1}.}$$

b)

Avec $I_0 = e^x + C$:

$$I_1 = x e^x - 1 \cdot I_0 = x e^x - e^x + C = (x-1)e^x + C,$$

$$I_2 = x^2 e^x - 2 I_1 = x^2 e^x - 2(x-1)e^x + C = (x^2 - 2x + 2)e^x + C,$$

$$I_3 = x^3 e^x - 3 I_2 = x^3 e^x - 3(x^2 - 2x + 2)e^x + C = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C.$$

Vérif. $(I_3) \cdot [(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x]' = (3x^2 - 6x + 6)e^x + (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x = x^3 e^x.$

5 – deux intégrales couplées

Exo 5

a)

On garde toujours $V' = e^{2x}$, donc $V = \frac{1}{2}e^{2x}$.

Pour $I, U = \cos 3x$ ($U' = -3 \sin 3x$):

$$I = \frac{e^{2x}}{2} \cos 3x - \int \frac{e^{2x}}{2} (-3 \sin 3x) dx = \frac{e^{2x}}{2} \cos 3x + \frac{3}{2} J.$$

Pour $J, U = \sin 3x$ ($U' = 3 \cos 3x$):

$$J = \frac{e^{2x}}{2} \sin 3x - \int \frac{e^{2x}}{2} (3 \cos 3x) dx = \frac{e^{2x}}{2} \sin 3x - \frac{3}{2} I.$$

b)

On injecte la 2 relation dans la 1 :

$$I = \frac{e^{2x}}{2} \cos 3x + \frac{3}{2} \left(\frac{e^{2x}}{2} \sin 3x - \frac{3}{2} I \right) \implies \frac{13}{4} I = \frac{e^{2x}}{4} (2 \cos 3x + 3 \sin 3x),$$

d'où $I = \frac{e^{2x}}{13} (2 \cos 3x + 3 \sin 3x) + C$, puis $J = \frac{e^{2x}}{2} \sin 3x - \frac{3}{2} I =$

$$\frac{e^{2x}}{13} (2 \sin 3x - 3 \cos 3x) + C.$$

c)

Avec la primitive $\mathcal{I}(x) = \frac{e^{2x}}{13} (2 \cos 3x + 3 \sin 3x)$, et puisqu'en $x = \pi/3$ on a $\cos \pi = -1, \sin \pi = 0$:

$$\int_0^{\pi/3} e^{2x} \cos 3x dx = [\mathcal{I}(x)]_0^{\pi/3} = \frac{e^{2\pi/3}}{13} (-2) - \frac{1}{13} (2) = \boxed{-\frac{2}{13} (e^{2\pi/3} + 1)}.$$

Exo 6 6 – aire sous une courbe

a)

$\int x e^{-x} dx$ avec $U = x, V' = e^{-x}$ ($U' = 1, V = -e^{-x}$):

$$\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C.$$

Une primitive est donc $F(x) = -(x + 1)e^{-x}$.

b)

Comme $f \geq 0$ sur $[0, 2]$, l'aire est directement l'intégrale :

$$\mathcal{A} = \int_0^2 x e^{-x} dx = \left[-(x+1)e^{-x} \right]_0^2 = -3e^{-2} - (-1) = \boxed{1 - 3e^{-2} \text{ u.a.}} (\approx 0,594 \text{ u.a.}).$$

c)

Sur $[0, b]$, $\int_0^b x e^{-x} dx = \left[-(x+1)e^{-x} \right]_0^b = 1 - (b+1)e^{-b}$. Or $(b+1)e^{-b} \rightarrow 0$ quand $b \rightarrow +\infty$ (l'exponentielle l'emporte sur le polynôme), donc l'aire totale vaut

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} (1 - (b+1)e^{-b}) = \boxed{1 \text{ u.a.}}$$

Exo 7 7 – logarithme au carré $\times$ polynôme

$$\int x(\ln x)^2 dx. U = (\ln x)^2, V' = x, \text{ donc } U' = \frac{2 \ln x}{x}, V = \frac{x^2}{2}.$$

$$\int x(\ln x)^2 dx = \frac{x^2}{2} (\ln x)^2 - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{2 \ln x}{x} dx = \frac{x^2}{2} (\ln x)^2 - \int x \ln x dx.$$

$$\text{Or } \int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \text{ (niveau Moyen), donc}$$

$$\boxed{\int x(\ln x)^2 dx = \frac{x^2}{2} (\ln x)^2 - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} + C.}$$

$$\text{Vérif. } \left[\frac{x^2}{2} (\ln x)^2 - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} \right]' = x(\ln x)^2 + x \ln x - x \ln x - \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x(\ln x)^2.$$

Exo 8 8 – récurrence pour $\int (\ln x)^n$

a)

Pour $n \geq 1$, IPP avec $U = (\ln x)^n, V' = 1 (U' = \frac{n(\ln x)^{n-1}}{x}, V = x)$:

$$J_n = x(\ln x)^n - \int x \cdot \frac{n(\ln x)^{n-1}}{x} dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} dx = \boxed{x(\ln x)^n - n J_{n-1}.}$$

b)

Avec $J_0 = x + C$:

$$J_1 = x \ln x - 1 \cdot J_0 = x \ln x - x + C,$$

$$J_2 = x(\ln x)^2 - 2J_1 = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C,$$

$$J_3 = x(\ln x)^3 - 3J_2 = x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x \ln x - 6x + C.$$

Exo 9 9 – une IPP qui « boucle » déguisée

a)

Pour $I, U = \cos(\ln x), V' = 1 (U' = -\frac{\sin(\ln x)}{x}, V = x)$:

$$I = x \cos(\ln x) - \int x \cdot \left(-\frac{\sin(\ln x)}{x}\right) dx = x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx = x \cos(\ln x) + J.$$

Pour $J, U = \sin(\ln x), V' = 1 (U' = \frac{\cos(\ln x)}{x}, V = x)$:

$$J = x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx = x \sin(\ln x) - I.$$

b)

En reportant J dans la première relation :

$$I = x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - I \implies 2I = x(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)),$$

d'où $I = \frac{x}{2}(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + C$. **Vérif.** $\left[\frac{x}{2}(\cos(\ln x) + \sin(\ln x))\right]' = \frac{1}{2}(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + \frac{1}{2}(-\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) = \cos(\ln x).$

Exo 10 10 – aire entre deux courbes

a)

Pour $x \in [0, 1]$, on a $0 < e^{-x} \leq 1$, donc $x e^{-x} \leq x$ (car $x \geq 0$) : la droite $y = x$ est au-dessus de la courbe $y = x e^{-x}$.

b)

L'aire vaut

$$\mathcal{A} = \int_0^1 (x - x e^{-x}) dx = \int_0^1 x dx - \int_0^1 x e^{-x} dx.$$

D'une part $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$; d'autre part, avec $F(x) = -(x+1)e^{-x}$, $\int_0^1 x e^{-x} dx = [-(x+1)e^{-x}]_0^1 = -2e^{-1} + 1 = 1 - 2e^{-1}$. Donc

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} - (1 - 2e^{-1}) = \boxed{\frac{2}{e} - \frac{1}{2} \text{ u.a.}} (\approx 0,236 \text{ u.a.}).$$

Exo 11 11 – trois IPP successives

a)

$U = x^3, V' = e^{-x} (U' = 3x^2, V = -e^{-x})$:

$$\int x^3 e^{-x} dx = -x^3 e^{-x} + \int 3x^2 e^{-x} dx = -x^3 e^{-x} + 3 \int x^2 e^{-x} dx.$$

b)

Avec $\int x^2 e^{-x} dx = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C$:

$$\int x^3 e^{-x} dx = -x^3 e^{-x} - 3(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C = \boxed{-(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)e^{-x} + C}.$$

c)

$$[-(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)e^{-x}]' = -(3x^2 + 6x + 6)e^{-x} + (x^3 + 3x^2 + 6x + 6)e^{-x} = x^3 e^{-x}.$$

Exo 12 12 – arctangente sur un intervalle

a)

Par IPP ($U = \arctan x, V' = 1$), une primitive de $\arctan x$ est $x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$ (niveau Moyen).

b)

Comme $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ et $\ln(1 + 1^2) = \ln 2$:

$$B = \int_0^1 \arctan x \, dx = \left[x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) \right]_0^1 = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \right) - 0 = \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}}.$$

Exo 13 13 – un travail mécanique

$W = \int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx$. Une primitive de $x \cos x$ est $x \sin x + \cos x$ (niveau Facile). Donc

$$W = [x \sin x + \cos x]_0^{\pi/2} = \left(\frac{\pi}{2} \cdot 1 + 0 \right) - (0 + 1) = \boxed{\frac{\pi}{2} - 1 \text{ (J)}}.$$

Exo 14 14 – suite d'intégrales définies

a)

IPP avec $U = x^n, V' = e^x (U' = nx^{n-1}, V = e^x)$:

$$K_n = [x^n e^x]_0^1 - \int_0^1 nx^{n-1} e^x \, dx = (1 \cdot e - 0) - n \int_0^1 x^{n-1} e^x \, dx = \boxed{e - n K_{n-1}}.$$

b)

$$K_0 = \int_0^1 e^x \, dx = e - 1 ; K_1 = e - 1 \cdot K_0 = e - (e - 1) = 1 ; K_2 = e - 2K_1 = e - 2.$$

c)

Sur $[0, 1]$, $1 \leq e^x \leq e$; en multipliant par $x^n \geq 0$ puis en intégrant sur $[0, 1]$:

$$\int_0^1 x^n \, dx \leq K_n \leq e \int_0^1 x^n \, dx, \quad \text{soit} \quad \frac{1}{n+1} \leq K_n \leq \frac{e}{n+1}.$$

Comme $\frac{1}{n+1} \rightarrow 0$ et $\frac{e}{n+1} \rightarrow 0$, le théorème d'encadrement donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = 0$.



Tous les exos cochés ? Passe au niveau réel.

+

Ce carnet est un extrait de notre bibliothèque d'entraînement — la suite se joue en ligne.

Sur simulationconcours.be

- ✓ Le même carnet en interactif, avec correction en un clic
- ✓ Les autres mécaniques de la fiche, niveau par niveau
- ✓ 3100 QCM type concours, corrigés et expliqués
- ✓ Les cours complets — gratuits — et les fiches de révision

Tous les jeudis : simulation du concours en ligne

En conditions réelles — chrono, QCM type concours et score immédiat.



Rejoins-nous sur simulationconcours.be

scanne le QR ou tape l'adresse — les cours complets sont gratuits