



simulationconcours.be



Mathématiques

Carnet d'entraînement



Primitives & règle du dU

Intégrale d'une fonction continue · Mécanique 1 — des exercices calibrés concours, du plus simple au plus retors.

45 exercices

3 niveaux

corrigés détaillés

Comment bosser ce carnet

- ✓ Lis d'abord le tutoriel : la mécanique y est expliquée pas à pas
- ✓ Fais chaque niveau en entier **avant** d'ouvrir les corrigés
- ✓ Note à côté de chaque exo : réussi, hésité ou raté — et rejoue les ratés 48 h plus tard



simulationconcours.be

scanne & continue en ligne

Sommaire

- 1 Le tutoriel — la mécanique expliquée
- 2 Les exercices Facile x15 · Moyen x15 · Difficile x15
- 3 Les corrigés détaillés exercice par exercice

Le tutoriel

Ce document est un **carnet d'exercices** : on t'explique d'abord la mécanique, puis tu la travailles sur 45 exercices classés en trois niveaux. Les corrigés détaillés t'attendent en deuxième partie, après la page « Corrigés » — pas avant de l'avoir mérité.

*Tutoriel — Primitives usuelles et la règle du dU

On cherche ici des **intégrales indéfinies** : le résultat est une *fonction*, et il se termine **toujours** par $+ C$ (la constante d'intégration). Toute la mécanique consiste à reconnaître, dans l'intégrande, une brique $U(x)$ accompagnée de son différentiel $dU = U'(x) dx$, puis à appliquer une des six formes du formulaire.

L'ESSENTIEL *le seul réflexe à automatiser*

Une primitive se *vérifie* en la dérivant : si l'on retombe sur l'intégrande, c'est juste. Faites-le systématiquement — c'est le meilleur détecteur d'erreurs de signe et de coefficient.

MÉTHODE *la règle du dU en 4 gestes*

- 1 **Repérer** la brique $U(x)$: ce qui est à l'intérieur d'une puissance, d'un logarithme, d'un cosinus, d'une racine, d'une exponentielle...
- 2 **Calculer** $dU = U'(x) dx$.
- 3 **Comparer** dU à ce qui est écrit. S'il ne manque qu'une **constante**, on la compense en multipliant et divisant par cette constante (linéarité). S'il manque un facteur *non constant*, la forme directe ne s'applique pas.
- 4 **Appliquer** la formule du tableau avec U à la place de x , puis $+ C$.

Le tableau des six formes ($U = U(x)$, $dU = U'(x) dx$)

Forme	Intégrale	Primitive
1	$\int U^n dU (n \neq -1)$	$\frac{U^{n+1}}{n+1} + C$
2	$\int \frac{dU}{U}$	$\ln U + C$
3	$\int \sin U dU ; \int \cos U dU$	$-\cos U + C ; \sin U + C$
4	$\int \frac{dU}{\cos^2 U} ; \int \frac{dU}{\sin^2 U}$	$\tan U + C ; -\cot U + C$
5	$\int \frac{dU}{\sqrt{1-U^2}} ; \int \frac{dU}{1+U^2}$	$\arcsin U + C ; \arctan U + C$
6	$\int a^U dU (a > 0, a \neq 1)$	$\frac{a^U}{\ln a} + C (\int e^U dU = e^U + C)$

Sans oublier la **linéarité** : $\int [f + g] dx = \int f dx + \int g dx$ et $\int k f dx = k \int f dx$.

ATTENTION les pièges qui coûtent des points

- **Forme 1, cas $n = -1$** : $\frac{U^{n+1}}{n+1}$ n'a aucun sens (division par 0). Une primitive de $1/U$ n'est pas une puissance : c'est $\ln |U|$ (forme 2).
- **Forme 2, valeur absolue** : on écrit $\ln |U|$, jamais $\ln U$ tout court. (On peut retirer $| \cdot |$ seulement si l'on sait que $U > 0$, ex. $x^2 + 3$.)
- **Signes** : un « $-$ » devant $\cos$ (forme 3) et un « $-$ » devant $\cot$ (forme 4). On les retrouve via $(\cos)' = -\sin$ et $(\cot)' = -1/\sin^2$.

L'ESSENTIEL l'astuce « multiplier-diviser »

Quand dU diffère de l'intégrande par une simple **constante** k , on ne bloque pas : on insère k et on compense par $\frac{1}{k}$ devant l'intégrale. Par exemple $dx = \frac{1}{k} dU$ lorsque $U = kx + b$. C'est la recette universelle, valable pour les six formes.

🔗 **EXEMPLE** *compensation d'une constante – forme 1*

Calculer $\int (2x + 1)^4 dx$. On pose $U = 2x + 1$, donc $dU = 2 dx$, soit $dx = \frac{1}{2} dU$. Alors

$$\int (2x + 1)^4 dx = \int U^4 \cdot \frac{1}{2} dU = \frac{1}{2} \cdot \frac{U^5}{5} + C = \frac{(2x + 1)^5}{10} + C.$$

Vérification : $\left[\frac{(2x+1)^5}{10} \right]' = \frac{5(2x+1)^4 \cdot 2}{10} = (2x + 1)^4$.

🔗 **EXEMPLE** *le dU « tout prêt » – forme 2*

Calculer $\int \frac{2x}{x^2 + 3} dx$. On pose $U = x^2 + 3$, d'où $dU = 2x dx$: le numérateur est exactement dU.

Donc

$$\int \frac{dU}{U} = \ln |U| + C = \ln(x^2 + 3) + C$$

(la valeur absolue est inutile car $x^2 + 3 > 0$). **Vérification :** $[\ln(x^2 + 3)]' = \frac{2x}{x^2 + 3}$.

Les exercices

FACILE 15 exercices**Exo 1** 1 – polynôme par linéarité

Calculer $I_1 = \int (3x^2 + 2x - 5) dx$.

Exo 2 2 – puissance de x

Calculer $I_2 = \int x^5 dx$.

Exo 3 3 – la forme dU/U

Calculer $I_3 = \int \frac{dx}{x}$ (sur un intervalle où $x \neq 0$). Bien préciser la forme correcte de la primitive.

Exo 4 4 – sinus et cosinus

Calculer, en soignant les signes :

a)

$$\int \cos x \, dx$$

b)

$$\int \sin x \, dx.$$

Exo 5 5 – exponentielle

Calculer $I_5 = \int e^x dx$.

Exo 6 6 – puissance négative

Calculer $I_6 = \int \frac{dx}{x^3}$ (sur un intervalle où $x \neq 0$).

Exo 7 7 – racine carrée

Calculer $I_7 = \int \sqrt{x} \, dx$ (pour $x > 0$).

Exo 8 8 – l'inverse d'une racine

Calculer $I_8 = \int \frac{dx}{\sqrt{x}}$ (pour $x > 0$).

Exo 9 9 – la forme arctan

Calculer $I_9 = \int \frac{dx}{1+x^2}$.

Exo 10 10 – la forme arcsin

Calculer $I_{10} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (pour $-1 < x < 1$).

Exo 11 11 – la forme $1/\cos^2$

Calculer $I_{11} = \int \frac{dx}{\cos^2 x}$.

Exo 12 12 – la forme $1/\sin^2$

Calculer $I_{12} = \int \frac{dx}{\sin^2 x}$.

Exo 13 13 – exponentielle de base 2

Calculer $I_{13} = \int 2^x dx$.

Exo 14 14 – polynôme par linéarité

Calculer $I_{14} = \int (4x^3 - 6x^2 + 1) dx$.

Exo 15 15 – somme de deux formes usuelles

Calculer $I_{15} = \int (e^x - \sin x) dx$.

MOYEN 15 exercices

Exo 1 1 – puissance d'une expression affine

Calculer $J_1 = \int (x+3)^3 dx$.

Exo 2 2 – cosinus composé

Calculer $J_2 = \int \cos(2x) dx$.

Exo 3 3 – exponentielle composée

Calculer $J_3 = \int e^{2x} dx$.

Exo 4 4 – le dU presque prêt

Calculer $J_4 = \int \frac{2x}{x^2 + 3} dx$.

Exo 5 5 – la forme $1/\cos^2$ composée

Calculer $J_5 = \int \frac{dx}{\cos^2(3x)}$.

Exo 6 6 – puissance d'une affine, constante à compenser

Calculer $J_6 = \int (2x - 1)^4 dx$.

Exo 7 7 – sinus composé

Calculer $J_7 = \int \sin(3x) dx$.

Exo 8 8 – la forme dU/U affine

Calculer $J_8 = \int \frac{dx}{5x + 2}$ (sur un intervalle où $5x + 2 \neq 0$).

Exo 9 9 – exponentielle à exposant négatif

Calculer $J_9 = \int e^{-2x} dx$.

Exo 10 10 – puissance négative d'une affine

Calculer $J_{10} = \int \frac{dx}{(3x - 1)^2}$ (sur un intervalle où $3x - 1 \neq 0$).

Exo 11 11 – le dU presque prêt sous une racine

Calculer $J_{11} = \int x\sqrt{x^2 + 1} dx$.

Exo 12 12 – le dU presque prêt, forme dU/U

Calculer $J_{12} = \int \frac{x^2}{x^3 + 1} dx$ (sur un intervalle où $x^3 + 1 \neq 0$).

Exo 13 13 – puissance d'une fonction trigonométrique

Calculer $J_{13} = \int \sin^3 x \cos x \, dx$.

Exo 14 14 – la brique cachée $U = \ln x$

Calculer $J_{14} = \int \frac{\ln x}{x} \, dx$ (pour $x > 0$).

Exo 15 15 – la brique cachée $U = e^x + 1$

Calculer $J_{15} = \int \frac{e^x}{e^x + 1} \, dx$.

DIFFICILE 15 exercices

Exo 1 1 – mettre à l'échelle arcsin et arctan

Calculer :

a)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2}}$$

b)

$$\int \frac{dx}{3 + x^2}.$$

Exo 2 2 – puissance composée, avec et sans le bon facteur

Calculer :

a)

$$\int (5x^2 + 3)^3 10x \, dx$$

b)

$$\int (5x^2 + 3)^3 5x \, dx.$$

Exo 3 3 – factoriser le dénominateur / la racine

Calculer :

a)

$$\int \frac{dx}{9 + x^2}$$

b)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

Exo 4 4 – exponentielle de base $a \neq e$

Calculer :

a)

$$\int 2^{3x} dx$$

b)

$$\int 10^x dx.$$

Exo 5 5 – forme dU/U trigonométriqueCalculer $\int \frac{\sin x}{3 - \cos x} dx$.**Exo 6** 6 – compléter le carré vers arctan

Calculer :

a)

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5};$$

b)

$$\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 10}.$$

Exo 7 7 – séparer le numérateur

Calculer $\int \frac{2x + 3}{x^2 + 4} dx$ en scindant l'intégrande en deux formes du tableau.

Exo 8 8 – compléter le carré sous une racine

Calculer $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}$ (sur l'intervalle où $3 - 2x - x^2 > 0$).

Exo 9 9 – tangente et cotangente

Calculer :

a)

$$\int \tan x \, dx ;$$

b)

$$\int \cot x \, dx.$$

Exo 10 10 – un facteur x au numérateur

Calculer :

a)

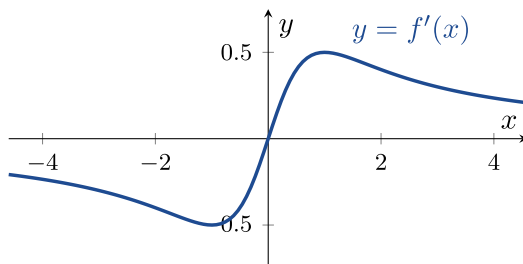
$$\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx ;$$

b)

$$\int \frac{x}{(1 + x^2)^2} dx.$$

Exo 11 11 – retrouver une fonction à partir de sa dérivée

La courbe ci-dessous représente la dérivée f' d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, définie par $f'(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.



a)

Déterminer l'ensemble des primitives de f' sur $\mathbb{R}$.

b)

Déterminer la fonction f vérifiant de plus $f(0) = 1$.

Exo 12 12 – puissance impaire d'une fonction trigonométrique

Calculer, à l'aide d'une identité puis de la règle du dU :

a)

$$\int \sin^3 x \, dx ;$$

b)

$$\int \cos^3 x \, dx.$$

Exo 13 13 – la brique cachée $U = \ln x$

Calculer $\int \frac{dx}{x \ln x}$ (pour $x > 0, x \neq 1$).

Exo 14 14 – reconnaître $1 + (e^x)^2$

Calculer $\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} \, dx$.

Exo 15 15 – la fonction est sa propre brique

Calculer :

a)

$$\int \frac{\arctan x}{1 + x^2} \, dx ;$$

b)

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx.$$



DEUXIÈME PARTIE

Corrigés

Chaque exercice repris pas à pas, niveau par niveau.
Compare ta démarche, pas seulement ton résultat.





Une seconde – avant d'ouvrir le corrigé...



Si ce carnet t'aide, rends-nous la pareille : parle de simulationconcours.be à quelqu'un qui prépare le concours. C'est comme ça qu'on peut continuer.

Ce qu'on a préparé pour toi

- ✓ Ce carnet en interactif, avec correction en un clic
- ✓ Les cours complets, chapitre par chapitre – gratuits
- ✓ 3100 QCM type concours, corrigés et expliqués
- ✓ Des fiches de révision à imprimer

Tous les jeudis : simulation du concours en ligne

En conditions réelles – chrono, QCM type concours et score immédiat.



Rejoins-nous sur simulationconcours.be

scanne le QR ou tape l'adresse – puis reviens vérifier tes réponses

Les corrigés

FACILE 15 exercices

Exo 1 1 – polynôme par linéarité

Par linéarité, on intègre chaque terme séparément (forme 1 avec $U = x$):

$$I_1 = 3 \int x^2 dx + 2 \int x dx - 5 \int 1 dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} - 5x + C =$$

$$\boxed{x^3 + x^2 - 5x + C.}$$

Vérification : $(x^3 + x^2 - 5x + C)' = 3x^2 + 2x - 5.$

Exo 2 2 – puissance de x

Forme 1 avec $U = x, n = 5 (n \neq -1)$:

$$I_2 = \int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \boxed{\frac{x^6}{6} + C.}$$

Vérification : $\left[\frac{x^6}{6}\right]' = \frac{6x^5}{6} = x^5.$

Exo 3 3 – la forme dU/U

C'est le cas exclu de la forme puissance ($n = -1$). On utilise la forme 2 avec $U = x$:

$$I_3 = \int \frac{dx}{x} = \boxed{\ln |x| + C.}$$

⚠ ATTENTION *valeur absolue obligatoire*

Écrire $\ln x + C$ serait faux sur $] -\infty, 0[$. La forme correcte, valable sur tout intervalle ne contenant pas 0, est $\ln |x| + C$.

Vérification : pour $x > 0$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; pour $x < 0$, $(\ln(-x))' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$.

Exo 4 4 – sinus et cosinus

Forme 3, avec $U = x$:

a)

$$\int \cos x \, dx = \boxed{\sin x + C}$$

b)

$$\int \sin x \, dx = \boxed{-\cos x + C.}$$

Exo 5 5 – exponentielle

Forme 6 dans le cas $a = e$, avec $U = x$ (et $\ln e = 1$):

$$I_5 = \int e^x \, dx = \boxed{e^x + C.}$$

Vérification : $(e^x)' = e^x$.

Exo 6 6 – puissance négative

Forme 1 avec $U = x, n = -3$ ($n \neq -1$):

$$I_6 = \int x^{-3} \, dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = \boxed{-\frac{1}{2x^2} + C.}$$

Vérification : $\left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right]' = -\frac{1}{2} \cdot (-2)x^{-3} = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$.

Exo 7 7 – racine carrée

On écrit $\sqrt{x} = x^{1/2}$. Forme 1 avec $n = \frac{1}{2}$ ($n \neq -1$):

$$I_7 = \int x^{1/2} \, dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + C = \boxed{\frac{2}{3}x^{3/2} + C.}$$

Vérification : $\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{1/2} = x^{1/2} = \sqrt{x}$.

Exo 8 8 – l'inverse d'une racine

On écrit $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$. Forme 1 avec $n = -\frac{1}{2}$ ($n \neq -1$):

$$I_8 = \int x^{-1/2} dx = \frac{x^{1/2}}{1/2} + C = \boxed{2\sqrt{x} + C.}$$

Vérification : $[2\sqrt{x}]' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$

Exo 9 9 – la forme arctan

Forme 5 (partie arctan) avec $U = x$:

$$I_9 = \int \frac{dx}{1+x^2} = \boxed{\arctan x + C.}$$

Vérification : $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$

Exo 10 10 – la forme arcsin

Forme 5 (partie arcsin) avec $U = x$:

$$I_{10} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \boxed{\arcsin x + C.}$$

Vérification : $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

Exo 11 11 – la forme $1/\cos^2$

Forme 4 avec $U = x$:

$$I_{11} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \boxed{\tan x + C.}$$

Vérification : $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$

Exo 12 12 – la forme $1/\sin^2$

Forme 4 avec $U = x$; attention au signe « − » :

$$I_{12} = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \boxed{-\cot x + C.}$$

Vérification : $(-\cot x)' = -\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = \frac{1}{\sin^2 x}.$

Exo 13 13 – exponentielle de base 2

Forme 6 avec $a = 2, U = x$:

$$I_{13} = \int 2^x dx = \boxed{\frac{2^x}{\ln 2} + C.}$$

Vérification : $\left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]' = \frac{1}{\ln 2} \cdot 2^x \ln 2 = 2^x.$

Exo 14 14 – polynôme par linéarité

Par linéarité, terme à terme (forme 1 avec $U = x$) :

$$I_{14} = 4 \cdot \frac{x^4}{4} - 6 \cdot \frac{x^3}{3} + x + C = \boxed{x^4 - 2x^3 + x + C.}$$

Vérification : $(x^4 - 2x^3 + x)' = 4x^3 - 6x^2 + 1.$

Exo 15 15 – somme de deux formes usuelles

Par linéarité : forme 6 ($a = e$) pour e^x , forme 3 pour $\sin x$ (avec son signe) :

$$I_{15} = \int e^x dx - \int \sin x dx = e^x - (-\cos x) + C = \boxed{e^x + \cos x + C.}$$

Vérification : $(e^x + \cos x)' = e^x - \sin x.$

MOYEN 15 exercices

Exo 1 1 – puissance d'une expression affine

On pose $U = x + 3$, donc $U' = 1$ et $dU = dx$: le dU est déjà présent. Forme 1 avec $n = 3$:

$$J_1 = \int U^3 dU = \frac{U^4}{4} + C = \boxed{\frac{(x+3)^4}{4} + C.}$$

Vérification : $\left[\frac{(x+3)^4}{4}\right]' = \frac{4(x+3)^3 \cdot 1}{4} = (x+3)^3.$

Exo 2 2 – cosinus composé

On pose $U = 2x$, d'où $dU = 2 dx$, soit $dx = \frac{1}{2} dU$. Forme 3 :

$$J_2 = \int \cos(2x) dx = \int \cos U \cdot \frac{1}{2} dU = \frac{1}{2} \sin U + C = \boxed{\frac{1}{2} \sin(2x) + C.}$$

Vérification : $\left[\frac{1}{2} \sin(2x)\right]' = \frac{1}{2} \cdot 2 \cos(2x) = \cos(2x).$

Exo 3 3 – exponentielle composée

On pose $U = 2x$, $dU = 2 dx$, soit $dx = \frac{1}{2} dU$. Forme 6 avec $a = e$:

$$J_3 = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int e^U dU = \frac{1}{2} e^U + C = \boxed{\frac{1}{2} e^{2x} + C.}$$

Vérification : $\left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]' = \frac{1}{2} \cdot 2 e^{2x} = e^{2x}.$

Exo 4 4 – le dU presque prêt

On pose $U = x^2 + 3$, donc $U' = 2x$ et $dU = 2x dx$: le numérateur est exactement dU. Forme 2 :

$$J_4 = \int \frac{2x dx}{x^2 + 3} = \int \frac{dU}{U} = \ln |U| + C = \boxed{\ln(x^2 + 3) + C.}$$

La valeur absolue est superflue car $x^2 + 3 > 0$ pour tout x .

Vérification : $[\ln(x^2 + 3)]' = \frac{2x}{x^2 + 3}.$

Exo 5 5 – la forme $1/\cos^2$ composée

On pose $U = 3x$, d'où $dU = 3 dx$, soit $dx = \frac{1}{3} dU$. Forme 4 :

$$J_5 = \int \frac{dx}{\cos^2(3x)} = \frac{1}{3} \int \frac{dU}{\cos^2 U} = \frac{1}{3} \tan U + C = \boxed{\frac{1}{3} \tan(3x) + C.}$$

Vérification : $\left[\frac{1}{3} \tan(3x) \right]' = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{\cos^2(3x)} = \frac{1}{\cos^2(3x)}.$

Exo 6 6 – puissance d'une affine, constante à compenser

On pose $U = 2x - 1$, donc $dU = 2 dx$, soit $dx = \frac{1}{2} dU$. Forme 1 avec $n = 4$:

$$J_6 = \int U^4 \cdot \frac{1}{2} dU = \frac{1}{2} \cdot \frac{U^5}{5} + C = \boxed{\frac{(2x - 1)^5}{10} + C.}$$

Vérification : $\left[\frac{(2x-1)^5}{10} \right]' = \frac{5(2x-1)^4 \cdot 2}{10} = (2x - 1)^4.$

Exo 7 7 – sinus composé

On pose $U = 3x$, d'où $dx = \frac{1}{3} dU$. Forme 3 :

$$J_7 = \int \sin(3x) dx = \frac{1}{3} \int \sin U dU = -\frac{1}{3} \cos U + C = \boxed{-\frac{1}{3} \cos(3x) + C.}$$

Vérification : $\left[-\frac{1}{3} \cos(3x)\right]' = -\frac{1}{3} \cdot (-\sin(3x)) \cdot 3 = \sin(3x).$

Exo 8 8 – la forme dU/U affine

On pose $U = 5x + 2$, d'où $dU = 5 dx$, soit $dx = \frac{1}{5} dU$. Forme 2 :

$$J_8 = \int \frac{dx}{5x+2} = \frac{1}{5} \int \frac{dU}{U} = \frac{1}{5} \ln |U| + C = \boxed{\frac{1}{5} \ln |5x+2| + C.}$$

ATTENTION valeur absolue

Selon l'intervalle, $5x + 2$ peut être négatif : on garde $\ln |5x + 2|$, jamais $\ln(5x + 2)$ tout court.

Vérification : $\left[\frac{1}{5} \ln |5x+2|\right]' = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{5x+2} = \frac{1}{5x+2}.$

Exo 9 9 – exponentielle à exposant négatif

On pose $U = -2x$, donc $dU = -2 dx$, soit $dx = -\frac{1}{2} dU$. Forme 6 ($a = e$) :

$$J_9 = \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \int e^U dU = -\frac{1}{2} e^U + C = \boxed{-\frac{1}{2} e^{-2x} + C.}$$

Vérification : $\left[-\frac{1}{2} e^{-2x}\right]' = -\frac{1}{2} \cdot (-2) e^{-2x} = e^{-2x}.$

Exo 10 10 – puissance négative d'une affine

On pose $U = 3x - 1$, $dx = \frac{1}{3} dU$. Forme 1 avec $n = -2$ ($n \neq -1$) :

$$J_{10} = \int (3x-1)^{-2} dx = \frac{1}{3} \int U^{-2} dU = \frac{1}{3} \cdot \frac{U^{-1}}{-1} + C = \boxed{-\frac{1}{3(3x-1)} + C.}$$

Vérification : $\left[-\frac{1}{3}(3x-1)^{-1}\right]' = -\frac{1}{3} \cdot (-1)(3x-1)^{-2} \cdot 3 = (3x-1)^{-2}.$

Exo 11 11 – le dU presque prêt sous une racine

On pose $U = x^2 + 1$, donc $dU = 2x dx$, soit $x dx = \frac{1}{2} dU$. Forme 1 avec $n = \frac{1}{2}$:

$$J_{11} = \int \sqrt{U} \cdot \frac{1}{2} dU = \frac{1}{2} \cdot \frac{U^{3/2}}{3/2} + C = \boxed{\frac{1}{3}(x^2 + 1)^{3/2} + C.}$$

Vérification : $\left[\frac{1}{3}(x^2 + 1)^{3/2}\right]' = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}(x^2 + 1)^{1/2} \cdot 2x = x\sqrt{x^2 + 1}.$

Exo 12 12 – le dU presque prêt, forme dU/U

On pose $U = x^3 + 1$, donc $dU = 3x^2 dx$, soit $x^2 dx = \frac{1}{3} dU$. Forme 2 :

$$J_{12} = \int \frac{x^2 dx}{x^3 + 1} = \frac{1}{3} \int \frac{dU}{U} = \frac{1}{3} \ln |U| + C = \boxed{\frac{1}{3} \ln |x^3 + 1| + C.}$$

Vérification : $\left[\frac{1}{3} \ln |x^3 + 1|\right]' = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x^2}{x^3 + 1} = \frac{x^2}{x^3 + 1}.$

Exo 13 13 – puissance d'une fonction trigonométrique

On pose $U = \sin x$, donc $dU = \cos x dx$: le facteur $\cos x dx$ est exactement dU. Forme 1 avec $n = 3$:

$$J_{13} = \int \sin^3 x \cos x dx = \int U^3 dU = \frac{U^4}{4} + C = \boxed{\frac{\sin^4 x}{4} + C.}$$

Vérification : $\left[\frac{\sin^4 x}{4}\right]' = \frac{4 \sin^3 x \cos x}{4} = \sin^3 x \cos x.$

Exo 14 14 – la brique cachée $U = \ln x$

On pose $U = \ln x$, donc $dU = \frac{dx}{x}$: le facteur $\frac{dx}{x}$ est exactement dU. Forme 1 avec $n = 1$:

$$J_{14} = \int \frac{\ln x}{x} dx = \int U dU = \frac{U^2}{2} + C = \boxed{\frac{(\ln x)^2}{2} + C.}$$

Vérification : $\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]' = \frac{2 \ln x}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x}.$

Exo 15 15 – la brique cachée $U = e^x + 1$

On pose $U = e^x + 1$, donc $dU = e^x dx$: le numérateur est exactement dU. Forme 2 :

$$J_{15} = \int \frac{e^x dx}{e^x + 1} = \int \frac{dU}{U} = \ln |U| + C = \boxed{\ln(e^x + 1) + C.}$$

La valeur absolue est superflue car $e^x + 1 > 0$.

Vérification : $[\ln(e^x + 1)]' = \frac{e^x}{e^x + 1}.$

DIFFICILE 15 exercices

Exo 1 1 – mettre à l'échelle arcsin et arctan

a)

On pose $U = \frac{x}{3}$, donc $dU = \frac{1}{3} dx$, soit $dx = 3 dU$. Forme 5 :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2}} = \int \frac{3 dU}{\sqrt{1 - U^2}} = 3 \arcsin U + C = \boxed{3 \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + C.}$$

Vérification : $\left[3 \arcsin \frac{x}{3}\right]' = 3 \cdot \frac{1/3}{\sqrt{1 - (x/3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (x/3)^2}}.$

b)

On factorise le dénominateur pour retrouver la forme $1 + U^2$:

$$\frac{1}{3 + x^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}.$$

On pose $U = \frac{x}{\sqrt{3}}$, d'où $dx = \sqrt{3} dU$:

$$\int \frac{dx}{3 + x^2} = \frac{1}{3} \int \frac{\sqrt{3} dU}{1 + U^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan U + C = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C.}$$

Vérification : $\left[\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}}\right]' = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1/\sqrt{3}}{1 + x^2/3} = \frac{1/3}{1 + x^2/3} = \frac{1}{3 + x^2}.$

Exo 2 2 – puissance composée, avec et sans le bon facteur

On pose $U = 5x^2 + 3$, donc $U' = 10x$ et $dU = 10x dx$.

a)

Le facteur $10x dx$ est *exactement* dU . Forme 1 avec $n = 3$:

$$\int (5x^2 + 3)^3 10x dx = \int U^3 dU = \frac{U^4}{4} + C = \boxed{\frac{(5x^2 + 3)^4}{4} + C.}$$

Vérification : $\left[\frac{(5x^2+3)^4}{4}\right]' = \frac{4(5x^2+3)^3 \cdot 10x}{4} = (5x^2 + 3)^3 10x.$

b)

Ici on a $5x \, dx$, c'est-à-dire $\frac{1}{2} dU$ (il manque le facteur 2). Donc

$$\int (5x^2 + 3)^3 5x \, dx = \int U^3 \cdot \frac{1}{2} dU = \frac{1}{2} \cdot \frac{U^4}{4} + C = \boxed{\frac{(5x^2 + 3)^4}{8} + C.}$$

Vérification: $\left[\frac{(5x^2+3)^4}{8} \right]' = \frac{4(5x^2+3)^3 \cdot 10x}{8} = (5x^2 + 3)^3 5x.$

Exo 3 3 – factoriser le dénominateur / la racine

a)

On écrit $9 + x^2 = 9\left(1 + \left(\frac{x}{3}\right)^2\right)$. En posant $U = \frac{x}{3}$, $dx = 3 dU$:

$$\int \frac{dx}{9 + x^2} = \frac{1}{9} \int \frac{3 dU}{1 + U^2} = \frac{3}{9} \arctan U + C = \boxed{\frac{1}{3} \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + C.}$$

Vérification: $\left[\frac{1}{3} \arctan \frac{x}{3} \right]' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1/3}{1+x^2/9} = \frac{1/9}{1+x^2/9} = \frac{1}{9+x^2}.$

b)

On écrit $\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = 2\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$. En posant $U = \frac{x}{2}$, $dx = 2 dU$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \int \frac{2 dU}{2\sqrt{1 - U^2}} = \int \frac{dU}{\sqrt{1 - U^2}} = \arcsin U + C = \boxed{\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C.}$$

Vérification: $\left[\arcsin \frac{x}{2} \right]' = \frac{1/2}{\sqrt{1-x^2/4}} = \frac{1/2}{\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}.$

Exo 4 4 – exponentielle de base $a \neq e$

a)

On pose $U = 3x$, donc $dx = \frac{1}{3} dU$. Forme 6 avec $a = 2$:

$$\int 2^{3x} dx = \frac{1}{3} \int 2^U dU = \frac{1}{3} \cdot \frac{2^U}{\ln 2} + C = \boxed{\frac{2^{3x}}{3 \ln 2} + C.}$$

Vérification: $\left[\frac{2^{3x}}{3 \ln 2} \right]' = \frac{1}{3 \ln 2} \cdot 2^{3x} \ln 2 \cdot 3 = 2^{3x}.$

b)

Forme 6 directe avec $a = 10, U = x$:

$$\int 10^x dx = \boxed{\frac{10^x}{\ln 10} + C.}$$

Vérification : $\left[\frac{10^x}{\ln 10} \right]' = \frac{1}{\ln 10} \cdot 10^x \ln 10 = 10^x.$

Exo 5 5 – forme dU/U trigonométrique

On reconnaît la forme dU/U en posant $U = 3 - \cos x$. Alors $U' = \sin x$ et $dU = \sin x dx$: le numérateur est exactement dU . Forme 2 :

$$\int \frac{\sin x dx}{3 - \cos x} = \int \frac{dU}{U} = \ln |U| + C = \boxed{\ln(3 - \cos x) + C.}$$

La valeur absolue est superflue car $3 - \cos x \geq 2 > 0$.

Vérification : $[\ln(3 - \cos x)]' = \frac{\sin x}{3 - \cos x}.$

Exo 6 6 – compléter le carré vers arctan

a)

On écrit $x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4$, puis on pose $U = \frac{x+1}{2}$, d'où $dx = 2 dU$:

$$\int \frac{dx}{(x + 1)^2 + 4} = \int \frac{2 dU}{4(1 + U^2)} = \frac{1}{2} \arctan U + C = \boxed{\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x + 1}{2}\right) + C.}$$

Vérification : $\left[\frac{1}{2} \arctan \frac{x+1}{2} \right]' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1/2}{1 + \left(\frac{x+1}{2}\right)^2} = \frac{1}{(x+1)^2 + 4} = \frac{1}{x^2 + 2x + 5}.$

b)

On écrit $x^2 - 6x + 10 = (x - 3)^2 + 1$, puis $U = x - 3, dU = dx$:

$$\int \frac{dx}{(x - 3)^2 + 1} = \int \frac{dU}{1 + U^2} = \arctan U + C = \boxed{\arctan(x - 3) + C.}$$

Vérification : $[\arctan(x - 3)]' = \frac{1}{1 + (x-3)^2} = \frac{1}{x^2 - 6x + 10}.$

Exo 7 7 – séparer le numérateur

On scinde en deux morceaux, chacun relevant d'une forme du tableau :

$$\int \frac{2x+3}{x^2+4} dx = \int \frac{2x}{x^2+4} dx + \int \frac{3}{x^2+4} dx.$$

Pour le premier, $U = x^2 + 4$ et $dU = 2x dx$ (forme 2) donnent $\ln(x^2 + 4)$. Pour le second, $x^2 + 4 = 4(1 + (\frac{x}{2})^2)$ et $U = \frac{x}{2}$ (forme 5) donnent $3 \cdot \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2}$. D'où

$$\ln(x^2 + 4) + \frac{3}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

Vérification: $\left[\ln(x^2 + 4) + \frac{3}{2} \arctan \frac{x}{2}\right]' = \frac{2x}{x^2+4} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1/2}{1+x^2/4} = \frac{2x}{x^2+4} + \frac{3}{x^2+4} = \frac{2x+3}{x^2+4}.$

Exo 8 8 – compléter le carré sous une racine

On met le trinôme sous forme canonique : $3 - 2x - x^2 = -(x^2 + 2x - 3) = -((x + 1)^2 - 4) = 4 - (x + 1)^2$. On pose alors $U = \frac{x+1}{2}$, d'où $dx = 2 dU$ et $\sqrt{4 - (x + 1)^2} = 2\sqrt{1 - U^2}$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} = \int \frac{2 dU}{2\sqrt{1 - U^2}} = \arcsin U + C = \arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right) + C.$$

Vérification: $\left[\arcsin \frac{x+1}{2}\right]' = \frac{1/2}{\sqrt{1 - (\frac{x+1}{2})^2}} = \frac{1/2}{\frac{1}{2}\sqrt{4 - (x+1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}.$

Exo 9 9 – tangente et cotangente

a)

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. On pose $U = \cos x$, donc $dU = -\sin x dx$. Forme 2 :

$$\int \tan x dx = \int \frac{-dU}{U} = -\ln |U| + C = -\ln |\cos x| + C.$$

Vérification: $[-\ln |\cos x|]' = -\frac{-\sin x}{\cos x} = \tan x.$

b)

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$. On pose $U = \sin x$, donc $dU = \cos x dx$. Forme 2 :

$$\int \cot x dx = \int \frac{dU}{U} = \ln |U| + C = \ln |\sin x| + C.$$

Vérification: $[\ln |\sin x|]' = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x.$

Exo 10 10 – un facteur x au numérateur

a)

On pose $U = 1 - x^2$, donc $dU = -2x dx$, soit $x dx = -\frac{1}{2} dU$. Forme l avec $n = -\frac{1}{2}$:

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \int U^{-1/2} dU = -\frac{1}{2} \cdot 2U^{1/2} + C = \boxed{-\sqrt{1-x^2} + C.}$$

Vérification : $[-\sqrt{1-x^2}]' = -\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

b)

On pose $U = 1 + x^2$, donc $dU = 2x dx$, soit $x dx = \frac{1}{2} dU$. Forme l avec $n = -2$:

$$\int \frac{x dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} \int U^{-2} dU = \frac{1}{2} \cdot \frac{U^{-1}}{-1} + C = \boxed{-\frac{1}{2(1+x^2)} + C.}$$

Vérification : $[-\frac{1}{2}(1+x^2)^{-1}]' = -\frac{1}{2} \cdot (-1)(1+x^2)^{-2} \cdot 2x = \frac{x}{(1+x^2)^2}$.

Exo 11 11 – retrouver une fonction à partir de sa dérivée

a)

On reconnaît la forme dU/U avec $U = x^2 + 1 > 0$, $dU = 2x dx$, soit $x dx = \frac{1}{2} dU$:

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dU}{U} = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C.$$

L'ensemble des primitives est donc $f(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C, C \in \mathbb{R}.$

b)

La condition $f(0) = 1$ donne $\frac{1}{2} \ln 1 + C = 1$, c'est-à-dire $C = 1$. Ainsi

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 1.}$$

Vérification : $[\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 1]' = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} = f'(x)$, et $f(0) = 1$.

Exo 12 12 – puissance impaire d'une fonction trigonométrique

a)

On isole un facteur $\sin x$ et on utilise $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, puis $U = \cos x$ ($dU = -\sin x dx$):

$$\int \sin^3 x dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx = - \int (1 - U^2) dU = -U + \frac{U^3}{3} + C =$$

$$-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

Vérification: $\left[-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}\right]' = \sin x + \frac{3 \cos^2 x (-\sin x)}{3} = \sin x(1 - \cos^2 x) = \sin^3 x.$

b)

De même avec $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ et $U = \sin x$ ($dU = \cos x dx$):

$$\int \cos^3 x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \int (1 - U^2) dU = U - \frac{U^3}{3} + C =$$

$$\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Vérification: $\left[\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}\right]' = \cos x - \frac{3 \sin^2 x \cos x}{3} = \cos x(1 - \sin^2 x) = \cos^3 x.$

Exo 13 13 – la brique cachée $U = \ln x$

On pose $U = \ln x$, donc $dU = \frac{dx}{x}$: le facteur $\frac{dx}{x}$ est exactement dU . Forme 2:

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{dU}{U} = \ln |U| + C = \ln |\ln x| + C.$$

Vérification: $[\ln |\ln x|]' = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln x}.$

Exo 14 14 – reconnaître $1 + (e^x)^2$

On écrit $1 + e^{2x} = 1 + (e^x)^2$ et on pose $U = e^x$, donc $dU = e^x dx$: le numérateur est exactement dU .
Forme 5 (partie arctan):

$$\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx = \int \frac{dU}{1 + U^2} = \arctan U + C = \arctan(e^x) + C.$$

Vérification: $[\arctan(e^x)]' = \frac{e^x}{1 + (e^x)^2} = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}.$

Exo 15 15 – la fonction est sa propre brique

a)

On pose $U = \arctan x$, donc $dU = \frac{dx}{1+x^2}$: le reste de l'intégrande est exactement dU . Forme I avec $n = 1$:

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx = \int U dU = \frac{U^2}{2} + C = \boxed{\frac{(\arctan x)^2}{2} + C.}$$

Vérification : $\left[\frac{(\arctan x)^2}{2} \right]' = \arctan x \cdot \frac{1}{1+x^2}$.

b)

On pose $U = \arcsin x$, donc $dU = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Forme I avec $n = 1$:

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int U dU = \frac{U^2}{2} + C = \boxed{\frac{(\arcsin x)^2}{2} + C.}$$

Vérification : $\left[\frac{(\arcsin x)^2}{2} \right]' = \arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.



Tous les exos cochés ? Passe au niveau réel.

+

Ce carnet est un extrait de notre bibliothèque d'entraînement — la suite se joue en ligne.

Sur simulationconcours.be

- ✓ Le même carnet en interactif, avec correction en un clic
- ✓ Les autres mécaniques de la fiche, niveau par niveau
- ✓ 3100 QCM type concours, corrigés et expliqués
- ✓ Les cours complets — gratuits — et les fiches de révision

Tous les jeudis : simulation du concours en ligne

En conditions réelles — chrono, QCM type concours et score immédiat.



Rejoins-nous sur simulationconcours.be

scanne le QR ou tape l'adresse — les cours complets sont gratuits