

Mathématiques

Carnet d'entraînement

Images, antécédents & domaine

Les fonctions · Mécanique 1 — des exercices calibrés concours,
du plus simple au plus retors.

45 exercices

3 niveaux

corrigés détaillés

Comment bosser ce carnet

- ✓ Lis d'abord le tutoriel : la mécanique y est expliquée pas à pas
- ✓ Fais chaque niveau en entier **avant** d'ouvrir les corrigés
- ✓ Note à côté de chaque exo : réussi, hésité ou raté — et rejoue les ratés 48 h plus tard



simulationconcours.be
scanne & continue en ligne

Sommaire

- 1 Le tutoriel — la mécanique expliquée
- 2 Les exercices Facile x15 · Moyen x15 · Difficile x15
- 3 Les corrigés détaillés exercice par exercice

Le tutoriel

Ce document est un **carnet d'exercices** : on t'explique d'abord la mécanique, puis tu la travailles sur 45 exercices classés en trois niveaux. Les corrigés détaillés t'attendent en deuxième partie, après la page « Corrigés » — pas avant de l'avoir mérité.

*1. Image et antécédent

Une fonction f associe à un nombre x une unique image $f(x)$.

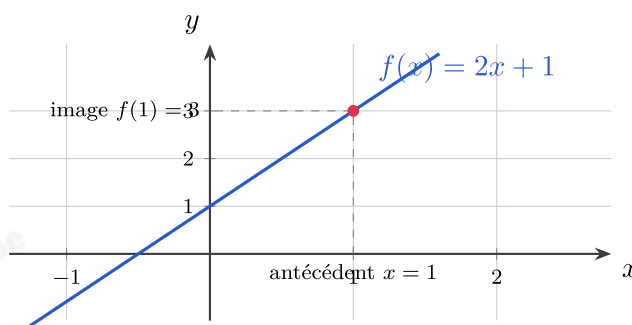
🔑 L'ESSENTIEL deux gestes inverses

- **Image de a** : on remplace x par a dans l'expression et on calcule $f(a)$. Le résultat est unique.
- **Antécédent de k** : on résout l'équation $f(x) = k$. Il peut y avoir 0, 1 ou plusieurs antécédents.

Graphiquement : l'image se lit *verticalement* (on monte de x jusqu'à la courbe), l'antécédent se lit *horizontalement* (on part d'une hauteur k et on rejoint la courbe).

🔑 EXEMPLE avec $f(x) = 2x + 1$

Image de 1 : $f(1) = 2 \times 1 + 1 = 3$. Antécédent de 7 : $2x + 1 = 7 \Rightarrow x = 3$.



*2. Domaine de définition : les trois interdits

Le **domaine de définition** D_f est l'ensemble des réels x pour lesquels $f(x)$ existe. Le déterminer, c'est repérer puis *exclure* les valeurs interdites.

🔗 **L'ESSENTIEL** les trois interdits à connaître par cœur

- 1 **Division** : un dénominateur doit être $\neq 0$.
- 2 **Racine carrée** (et toute racine d'indice *pair*) : la quantité sous la racine doit être ≥ 0 .
- 3 **Logarithme** : l'argument d'un $\ln$ ou $\log$ doit être > 0 (strictement).

☞ **MÉTHODE** déterminer un domaine de définition

- 1 **Repérer** les zones à risque : dénominateurs, racines paires, logarithmes.
- 2 **Écrire** une condition d'existence pour chacune ($\neq 0$; ≥ 0 ; > 0).
- 3 **Résoudre** chaque (in)équation.
- 4 **Combiner** (intersection) et écrire D_f en intervalles. Sans zone à risque : $D_f = \mathbb{R}$.

Notations utiles : $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}_0$; $[0, +\infty[= \mathbb{R}^+$; $]0, +\infty[= \mathbb{R}_0^+$.

💡 **EXEMPLE** trois cas types

$\frac{1}{x-3}$: dénominateur $\neq 0 \Rightarrow x \neq 3$, donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. $\sqrt{x-2}$: $x-2 \geq 0 \Rightarrow D_f = [2, +\infty[$.
 $\ln(x+1)$: $x+1 > 0 \Rightarrow D_f =]-1, +\infty[$.

⚠ **PIÈGE** trois réflexes qui font gagner des points

- Racine carrée : crochet *fermé* là où la quantité vaut 0 ($\sqrt{0} = 0$ existe) ; mais racine *au dénominateur* $\Rightarrow$ crochet *ouvert* (il faut > 0).
- Racine *cubique* (indice *impair*) : définie sur $\mathbb{R}$ tout entier — pas de condition !
- Un quotient sous une racine ou dans un log : dresser un **tableau de signes**.

Les exercices

FACILE 15 exercices**Exo 1**

Soit $f(x) = 3x - 5$.

a)

Calculer les images $f(2)$, $f(-1)$ et $f(0)$.

b)

Déterminer l'antécédent de 4 par f .

Exo 2

Soit $g(x) = x^2 - 2x$.

a)

Calculer $g(3)$ et $g(-2)$.

b)

Déterminer tous les antécédents de 0 par g .

Exo 3

Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \frac{1}{x-3}$.

Exo 4

Déterminer le domaine de définition de $g(x) = \sqrt{x-2}$.

Exo 5

Déterminer le domaine de définition de $h(x) = \ln(x+1)$.

Exo 6

Soit $f(x) = -2x + 7$.

a)

Calculer les images $f(0)$, $f(5)$ et $f(\frac{1}{2})$.

b)

Déterminer l'antécédent de 1 par f .

Exo 7

Soit $h(x) = \frac{1}{x}$ (fonction inverse).

a)

Calculer $h(2)$, $h(-4)$ et $h(\frac{1}{3})$.

b)

Déterminer l'antécédent de 5 par h .

Exo 8

Soit $g(x) = x^2 + 1$.

a)

Calculer $g(2)$ et $g(-2)$. Que remarque-t-on ?

b)

Combien d'antécédents le nombre -2 admet-il par g ? Justifier.

Exo 9

Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \frac{3}{2x-1}$.

Exo 10

Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \sqrt{5-x}$.

Exo 11

Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \ln(2x-4)$.

Exo 12

Déterminer le domaine de définition de chacune de ces fonctions.

a)

$$f(x) = x^2 - 3x + 2.$$

b)

$$g(x) = \frac{x-1}{x^2+1}.$$

Exo 13

Soit $f(x) = \sqrt{x} + 1$.

a)

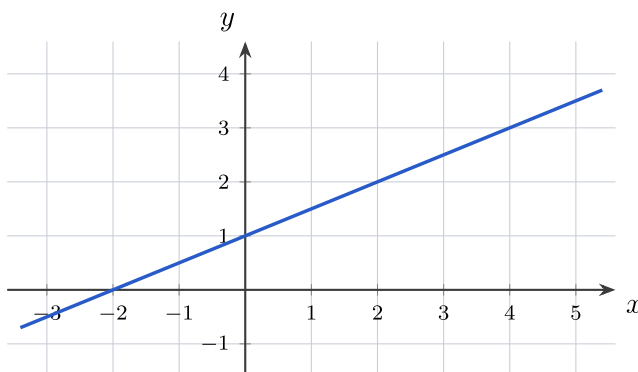
Calculer $f(0)$, $f(4)$ et $f(9)$.

b)

Déterminer l'antécédent de 3 par f .

Exo 14

La courbe ci-dessous représente une fonction f dans un repère orthonormé.



a)

Lire l'ordonnée à l'origine $f(0)$.

b)

Lire l'image $f(2)$.

c)

Déterminer graphiquement l'antécédent de 3 par f .

Exo 15

Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer la (les) valeur(s) interdite(s) puis donner le domaine de définition.

a)

$$f(x) = \frac{1}{x+6}.$$

b)

$$g(x) = \sqrt{x-4}.$$

c)

$$h(x) = \ln(5-x).$$

MOYEN

15 exercices

Exo 1

Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \sqrt{2x-6}$.

Exo 2

Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$.

Exo 3

Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \ln(3-x)$.

Exo 4

Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$. *Indication : ici deux interdits se cumulent.*

Exo 5

Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$. *Indication : on dresse le tableau de signes du quotient.*

Exo 6

Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \sqrt{x^2-9}$. *Indication : factoriser x^2-9 .*

Exo 7

Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \ln(x^2-4)$. *Comparer avec l'exercice précédent : ici l'inégalité est stricte.*

Exo 8

Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-3}$. *Indication : une condition pour la racine du numérateur, une pour le dénominateur.*

Exo 9

Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x-2}$. *Indication : le domaine d'une somme est l'intersection des domaines.*

Exo 10

Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+3}\right)$. *Indication : dresser le tableau de signes du quotient.*

Exo 11

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

a)

Déterminer les antécédents de 0 par f .

b)

Déterminer le(s) antécédent(s) de -1 par f , et préciser leur nombre.

Exo 12

Soit $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$.

a)

Donner le domaine de définition de f .

b)

Calculer $f(0)$ et $f(3)$.

c)

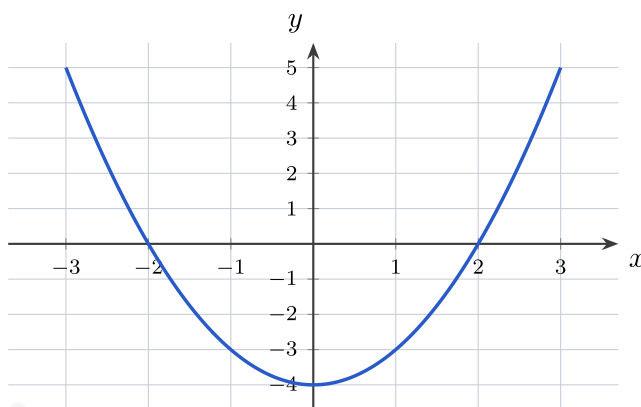
Déterminer l'antécédent de 2 par f .

Exo 13

Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$. Indication : la parabole $4 - x^2$ est tournée vers le bas.

Exo 14

La courbe ci-dessous est celle d'une fonction f (une parabole).



a)

Déterminer graphiquement les antécédents de 0 par f .

b)

Combien le nombre -4 admet-il d'antécédents ? Et le nombre -5 ?

c)

Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq 0$.

Exo 15

Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$. *Indication : deux interdits se cumulent.*

DIFFICILE

15 exercices

Exo 1

On considère le trinôme $x^2 - x - 6$.

a)

Factoriser $x^2 - x - 6$, puis déterminer le domaine de définition de $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$.

b)

Déterminer le domaine de définition de $g(x) = \ln(x^2 - x - 6)$. Comparer avec le domaine de f .

Exo 2

a)

Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \sqrt[3]{2x+1}$ (racine cubique).

b)

Déterminer le domaine de définition de $g(x) = \sqrt{2x+1}$ (racine carrée).

c)

Expliquer la différence.

Exo 3

La fonction $\arcsin$ n'est définie que sur $[-1, 1]$. Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \arcsin(2x - 1)$.

Exo 4

Soit $f(x) = \frac{x}{x+1}$, définie pour $x \neq -1$.

a)

Montrer que $f(f(x)) = \frac{x}{2x+1}$.

b)

En déduire le domaine de définition de la composée $f \circ f$.

Exo 5

Mise en situation. Une grandeur est modélisée par $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{4-x^2}}$. Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles cette expression a un sens (son domaine de définition).

Exo 6

On pose $f(x) = \sqrt{x+4} + \sqrt{2-x}$ et $g(x) = \sqrt{x+4} - \sqrt{2-x}$.

a)

Écrire les conditions d'existence de f , puis déterminer D_f .

b)

Déterminer le domaine de définition de g . Comparer avec celui de f et expliquer.

Exo 7

a)

Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \sqrt{\sqrt{x} - 3}$ (radical emboîté).

b)

Déterminer le domaine de définition de $g(x) = \sqrt{6 - \sqrt{x}}$.

Exo 8

Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \ln\left(\frac{2x-1}{x-3}\right)$. *Indication : étudier le signe du quotient à l'aide d'un tableau.*

Exo 9

On rappelle que $\arccos$ n'est définie que sur $[-1, 1]$, tandis que $\arctan$ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

a)

Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \arccos\left(\frac{x-1}{2}\right)$.

b)

Déterminer le domaine de définition de $g(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, et expliquer pourquoi la seule contrainte provient de $\frac{1}{x}$.

Exo 10

Soit $f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$.

a)

Écrire les conditions d'existence, puis déterminer D_f .

b)

Déterminer l'antécédent de 0 par f .

Exo 11

Pour $m \in \mathbb{R}$, on pose $f_m(x) = \sqrt{x^2 - 2x + m}$.

a)

Déterminer le domaine de définition de f_1 (cas $m = 1$).

b)

Déterminer toutes les valeurs de m pour lesquelles $D_f = \mathbb{R}$.

c)

Déterminer le domaine de définition de f_0 (cas $m = 0$).

Exo 12

Soit $f(x) = e^{2x} - 3e^x + 2$.

a)

En posant $X = e^x$, montrer que résoudre $f(x) = 0$ revient à résoudre $X^2 - 3X + 2 = 0$.

b)

En déduire tous les antécédents de 0 par f .

Exo 13

a)

Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|-1}}$.

b)

Déterminer le domaine de définition de $g(x) = \sqrt{|x|-1}$ et comparer les bornes.

Exo 14

Mise en situation. La concentration d'un principe actif (en mg/L) est modélisée, pour t en heures, par

$$C(t) = \frac{\sqrt{t}}{\ln(5-t)}.$$

a)

Écrire toutes les conditions d'existence de $C(t)$.

b)

En déduire le domaine de définition de C .

Exo 15

Soit $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$.

a)

Montrer que, pour tout réel x , $-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1$.

b)

En déduire le domaine de définition de f .



DEUXIÈME PARTIE

Corrigés

Chaque exercice repris pas à pas, niveau par niveau.
Compare ta démarche, pas seulement ton résultat.





Une seconde – avant d'ouvrir le corrigé...



Si ce carnet t'aide, rends-nous la pareille : parle de simulationconcours.be à quelqu'un qui prépare le concours. C'est comme ça qu'on peut continuer.

Ce qu'on a préparé pour toi

- ✓ Ce carnet en interactif, avec correction en un clic
- ✓ Les cours complets, chapitre par chapitre – gratuits
- ✓ 3100 QCM type concours, corrigés et expliqués
- ✓ Des fiches de révision à imprimer

Tous les jeudis : simulation du concours en ligne

En conditions réelles – chrono, QCM type concours et score immédiat.



Rejoins-nous sur simulationconcours.be

scanne le QR ou tape l'adresse – puis reviens vérifier tes réponses

Les corrigés

FACILE 15 exercices

Exo 1

$$f(x) = 3x - 5.$$

a)

$$f(2) = 3 \times 2 - 5 = \boxed{1}; f(-1) = 3 \times (-1) - 5 = \boxed{-8}; f(0) = 3 \times 0 - 5 = \boxed{-5}.$$

b)

On résout $f(x) = 4 : 3x - 5 = 4 \Leftrightarrow 3x = 9 \Leftrightarrow x = 3$. L'antécédent de 4 est $\boxed{3}$.

Exo 2

$$g(x) = x^2 - 2x.$$

a)

$$g(3) = 3^2 - 2 \times 3 = 9 - 6 = \boxed{3}; g(-2) = (-2)^2 - 2 \times (-2) = 4 + 4 = \boxed{8}.$$

b)

On résout $g(x) = 0 : x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$. Les antécédents de 0 sont $\boxed{0 \text{ et } 2}$ (un même nombre peut avoir *plusieurs* antécédents).

Exo 3

Zone à risque : le dénominateur $x - 3$. Condition d'existence : $x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$.

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

Exo 4

Zone à risque : la racine carrée. Condition : $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$. On garde le crochet fermé en 2 car $\sqrt{0} = 0$ existe.

$$D_f = [2, +\infty[$$

Exo 5

Zone à risque : le logarithme. Condition : $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$ (strict : $\ln 0$ n'existe pas).

$$D_f =]-1, +\infty[$$

Exo 6

$$f(x) = -2x + 7.$$

a)

$$f(0) = \boxed{7}; f(5) = -2 \times 5 + 7 = \boxed{-3}; f\left(\frac{1}{2}\right) = -2 \times \frac{1}{2} + 7 = \boxed{6}.$$

b)

On résout $f(x) = 1$: $-2x + 7 = 1 \Leftrightarrow -2x = -6 \Leftrightarrow x = 3$. L'antécédent de 1 est $\boxed{3}$.

Exo 7

$$h(x) = \frac{1}{x}.$$

a)

$$h(2) = \boxed{\frac{1}{2}}; h(-4) = \boxed{-\frac{1}{4}}; h\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\frac{1}{3}} = \boxed{3}.$$

b)

On résout $\frac{1}{x} = 5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$. L'antécédent de 5 est $\boxed{\frac{1}{5}}$.

Exo 8

$$g(x) = x^2 + 1.$$

a)

$g(2) = 2^2 + 1 = \boxed{5}$ et $g(-2) = (-2)^2 + 1 = \boxed{5}$. Les deux images sont *égales* : 2 et -2 ont la même image (la fonction est paire).

b)

On résout $g(x) = -2$: $x^2 + 1 = -2 \Leftrightarrow x^2 = -3$. Un carré n'est jamais négatif, donc l'équation n'a *aucune* solution : -2 admet $\boxed{0 \text{ antécédent}}$ par g .

Exo 9

Zone à risque : le dénominateur $2x - 1$. Condition : $2x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$.

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

Exo 10

Zone à risque : la racine carrée. Condition : $5 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 5$ (attention au sens de l'inégalité).

$$D_f =] - \infty, 5]$$

Exo 11

Zone à risque : le logarithme. Condition : $2x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 2$ (strict).

$$D_f =]2, +\infty[$$

Exo 12

a)

$f(x) = x^2 - 3x + 2$ est un polynôme : aucune zone à risque, donc $D_f = \mathbb{R}$.

b)

$g(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$: le dénominateur $x^2 + 1$ vaut au moins 1, il ne s'annule jamais. Donc $D_g = \mathbb{R}$.

Exo 13

$$f(x) = \sqrt{x} + 1.$$

a)

$$f(0) = \sqrt{0} + 1 = \boxed{1}; f(4) = \sqrt{4} + 1 = \boxed{3}; f(9) = \sqrt{9} + 1 = \boxed{4}.$$

b)

On résout $f(x) = 3$: $\sqrt{x} + 1 = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$. L'antécédent de 3 est $\boxed{4}$.

Exo 14

Lecture graphique (la courbe est la droite passant par $(0, 1)$ et $(2, 2)$).

a)

La courbe coupe l'axe des ordonnées à la hauteur 1 : $f(0) = \boxed{1}$.

b)

Au-dessus de $x = 2$, la courbe est à la hauteur 2 : $f(2) = \boxed{2}$.

c)

On part de la hauteur 3 et on rejoint la courbe : elle est atteinte en $x = 4$. L'antécédent de 3 est $\boxed{4}$.

Exo 15

a)

Dénominateur $\neq 0$: $x + 6 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -6$. Valeur interdite : -6 . $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-6\}$.

b)

Racine carrée : $x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$. $D_g = [4, +\infty[$.

c)

Logarithme : $5 - x > 0 \Leftrightarrow x < 5$. $D_h =]-\infty, 5[$.

MOYEN

15 exercices

Exo 1

Racine carrée : $2x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 6 \Leftrightarrow x \geq 3$.

$$D_f = [3, +\infty[$$

Exo 2

Dénominateur : $x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ et $x \neq -2$. Le numérateur ne pose aucune condition.

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

Exo 3

Logarithme : l'argument doit être strictement positif, $3 - x > 0 \Leftrightarrow x < 3$.

$$D_f =]-\infty, 3[$$

Exo 4

Deux interdits se cumulent :

- sous la racine : $x - 1 \geq 0$;
- au dénominateur : $\sqrt{x - 1} \neq 0 \Rightarrow x - 1 \neq 0$.

L'intersection donne $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ (le crochet en 1 devient *ouvert*).

$$D_f =]1, +\infty[$$

Exo 5

Il faut $\frac{x-1}{x+2} \geq 0$ et $x + 2 \neq 0$. Numérateur nul en $x = 1$, dénominateur nul en $x = -2$.

x	$-\infty$		-2		$1 + \infty$
$x - 1$		—		—	0+
$x + 2$		—	0	+	++
$\frac{x-1}{x+2}$		+	$\neq$	—	0+

Le quotient est ≥ 0 sur $] - \infty, -2[$ (signe +) et sur $[1, +\infty[$ (signe +, en incluant 1 où il vaut 0). On exclut $x = -2$ (dénominateur nul).

$$D_f =] - \infty, -2[\cup [1, +\infty[$$

Exo 6

Racine carrée : $x^2 - 9 \geq 0$. Or $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$, produit d'un trinôme de coefficient dominant > 0 , donc ≥ 0 à l'extérieur des racines -3 et 3 (bornes incluses).

$$D_f =] - \infty, -3] \cup [3, +\infty[$$

Exo 7

Logarithme : $x^2 - 4 > 0$ (strict). Comme $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$, ce produit est > 0 à l'extérieur des racines -2 et 2 , bornes exclues.

$$D_f =] - \infty, -2[\cup]2, +\infty[$$

Contrairement à l'exercice 6, les bornes sont ici exclues (le log exige une inégalité stricte).

Exo 8

Deux zones à risque :

- racine au numérateur : $x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$;
- dénominateur : $x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$.

On garde le crochet fermé en -1 (la racine y vaut 0, ce qui est permis au numérateur) et on retire le point 3.

$$D_f = [-1, 3[\cup]3, +\infty[$$

Exo 9

Deux zones à risque :

- racine : $x \geq 0$;
- dénominateur : $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

Le domaine est l'intersection $[0, +\infty[$ privé de 2 :

$$D_f = [0, 2[\cup]2, +\infty[$$

Exo 10

Logarithme : il faut $\frac{x-1}{x+3} > 0$ (strict), avec $x + 3 \neq 0$. Numérateur nul en $x = 1$, dénominateur nul en $x = -3$.

x	$-\infty$		-3		$1 + \infty$
$x - 1$		—		—	0+
$x + 3$		—	0	+	++
$\frac{x-1}{x+3}$		+	$\neq$	—	0+

Le quotient est *strictement* positif sur $] - \infty, -3[$ et sur $]1, +\infty[$ (on exclut $x = 1$ où il vaut 0, et $x = -3$ où le dénominateur s'annule).

$$D_f =] - \infty, -3[\cup]1, +\infty[$$

Exo 11

$$f(x) = x^2 - 4x + 3.$$

a)

Antécédents de 0 : on résout $x^2 - 4x + 3 = 0$. $\Delta = (-4)^2 - 4(1)(3) = 16 - 12 = 4$, d'où $x = \frac{4 \pm 2}{2}$, soit $x = 1$ et $x = 3$. Les antécédents de 0 sont **1 et 3**.

b)

Antécédents de -1 : on résout $x^2 - 4x + 3 = -1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0$, d'où $x = 2$. Le nombre -1 admet **un seul antécédent**, $x = 2$ (racine double).

Exo 12

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2}.$$

a)

Dénominateur : $x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$, donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

b)

$$f(0) = \frac{0-1}{0+2} = -\frac{1}{2}; f(3) = \frac{3-1}{3+2} = \frac{2}{5}.$$

c)

On résout $\frac{x-1}{x+2} = 2$ (avec $x \neq -2$) : $x - 1 = 2(x + 2) = 2x + 4 \Leftrightarrow -5 = x$. L'antécédent de 2 est -5 .

Exo 13

Racine carrée : $4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$. La parabole $4 - x^2$ (tournée vers le bas) est ≥ 0 entre ses racines -2 et 2 , bornes incluses.

$$D_f = [-2, 2]$$

Exo 14

Lecture graphique (la parabole a pour sommet $(0, -4)$ et coupe l'axe des abscisses en -2 et 2).

a)

La courbe coupe l'axe des abscisses (hauteur 0) en deux points : les antécédents de 0 sont -2 et 2 .

b)

La hauteur -4 n'est atteinte qu'au sommet : -4 admet 1 antécédent ($x = 0$). La hauteur -5 est sous le sommet : la courbe ne l'atteint jamais, donc -5 admet 0 antécédent.

c)

La courbe est au-dessus (ou sur) l'axe des abscisses pour $x \leq -2$ et pour $x \geq 2$:

$$f(x) \geq 0 \iff x \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[.$$

Exo 15

Deux zones à risque :

- logarithme : $x > 0$;
- dénominateur : $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.

L'intersection de $x > 0$ et $x \neq 1$ donne

$$D_f =]0, 1[\cup]1, +\infty[$$

DIFFICILE

15 exercices

Exo 1

Racines de $x^2 - x - 6$: $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-6) = 1 + 24 = 25$, d'où $x = \frac{1 \pm 5}{2}$, soit $x = 3$ et $x = -2$.
Donc $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$.

a)

Racine carrée : il faut $(x - 3)(x + 2) \geq 0$. Un produit de ce trinôme (avec $a = 1 > 0$) est ≥ 0 à l'extérieur des racines, bornes *incluses* :

$$D_f =] - \infty, -2] \cup [3, +\infty[.$$

b)

Logarithme : il faut $(x - 3)(x + 2) > 0$ (*strict*), donc à l'extérieur des racines, bornes *exclues* :

$$D_g =] - \infty, -2[\cup]3, +\infty[.$$

Différence : le log *exclut* -2 et 3 (où le trinôme vaut 0), alors que la racine les *inclut*.

Exo 2

a)

La racine *cubique* (indice *impair*) existe pour tout réel : par exemple $\sqrt[3]{-8} = -2$. Aucune condition.

$$D_f = \mathbb{R}.$$

b)

La racine *carrée* impose $2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$.

$$D_g = \left[-\frac{1}{2}, +\infty \right[.$$

c)

Seules les racines d'indice *pair* ($\sqrt{}, \sqrt[4]{}, \dots$) exigent un argument ≥ 0 . Les racines d'indice *impair* sont définies sur $\mathbb{R}$.

⚠ PIÈGE

Écrire $D_f = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ pour $\sqrt[3]{2x+1}$ est l'erreur classique : on confond racine cubique et racine carrée.

Exo 3

Condition d'existence de $\arcsin(2x - 1)$: $-1 \leq 2x - 1 \leq 1$.

$$-1 \leq 2x - 1 \Rightarrow 0 \leq 2x \Rightarrow x \geq 0, \quad 2x - 1 \leq 1 \Rightarrow 2x \leq 2 \Rightarrow x \leq 1.$$

L'intersection donne

$$D_f = [0, 1].$$

Exo 4

a)

$f(f(x)) = \frac{f(x)}{f(x)+1} = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1}$. Au dénominateur : $\frac{x}{x+1} + 1 = \frac{x+(x+1)}{x+1} = \frac{2x+1}{x+1}$. Donc

$$f(f(x)) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{2x+1}{x+1}} = \frac{x}{x+1} \times \frac{x+1}{2x+1} = \boxed{\frac{x}{2x+1}}.$$

b)

Pour que $f \circ f$ existe, il faut d'abord que $f(x)$ existe ($x \neq -1$), puis que f s'applique à $f(x)$, c'est-à-dire $f(x) \neq -1$. Or $\frac{x}{x+1} = -1 \Leftrightarrow x = -(x+1) \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$. On retrouve d'ailleurs le dénominateur $2x+1$ qui s'annule en $x = -\frac{1}{2}$. D'où

$$D_{f \circ f} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -1, -\frac{1}{2} \right\}.$$

Exo 5

Deux conditions à réunir :

- logarithme : $x > 0$;

- racine carrée *au dénominateur*: $4 - x^2 > 0$ (strict) $\Leftrightarrow -2 < x < 2$.

L'intersection de $x > 0$ et $-2 < x < 2$ donne

$$D_f =]0, 2[.$$

Autrement dit, l'expression n'a de sens que pour x strictement compris entre 0 et 2.

Exo 6

a)

f contient deux racines carrées : il faut $x + 4 \geq 0$ et $2 - x \geq 0$, soit $x \geq -4$ et $x \leq 2$. L'intersection donne

$$D_f = [-4, 2].$$

b)

g fait intervenir exactement les *mêmes* racines carrées : les conditions d'existence sont identiques ($x + 4 \geq 0$ et $2 - x \geq 0$). Le signe $-$ entre les deux racines ne change rien aux conditions d'existence, donc

$$D_g = [-4, 2] = D_f.$$

Exo 7

a)

Radical emboîté : il faut d'abord que $\sqrt{x}$ existe ($x \geq 0$), puis que la quantité sous la racine extérieure soit ≥ 0 : $\sqrt{x} - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 9$. La condition $x \geq 9$ contient $x \geq 0$, donc

$$D_f = [9, +\infty[.$$

b)

Même principe : $x \geq 0$ et $6 - \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 6 \Leftrightarrow x \leq 36$. L'intersection de $x \geq 0$ et $x \leq 36$ donne

$$D_g = [0, 36].$$

Exo 8

Logarithme : il faut $\frac{2x-1}{x-3} > 0$. Numérateur nul en $x = \frac{1}{2}$, dénominateur nul en $x = 3$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$3 + \infty$
$2x - 1$	—	0 +	++
$x - 3$	—	—	0+
$\frac{2x-1}{x-3}$	+	0 —	#+

Le quotient est > 0 sur $] - \infty, \frac{1}{2}[$ et sur $]3, +\infty[$ (on exclut $x = \frac{1}{2}$ où il vaut 0, et $x = 3$ où le dénominateur s'annule).

$$D_f =] - \infty, \frac{1}{2}[\cup]3, +\infty[.$$

Exo 9

a)

Condition d'existence de $\arccos\left(\frac{x-1}{2}\right)$: $-1 \leq \frac{x-1}{2} \leq 1$. En multipliant par 2 : $-2 \leq x - 1 \leq 2$, puis en ajoutant 1 : $-1 \leq x \leq 3$.

$$D_f = [-1, 3].$$

b)

$\arctan$ est définie sur $\mathbb{R}$: elle n'impose aucune condition sur son argument. La seule contrainte vient donc de $\frac{1}{x}$, qui exige $x \neq 0$.

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Exo 10

$$f(x) = \sqrt{1 - \ln x}.$$

a)

Deux conditions : le logarithme exige $x > 0$; la racine exige $1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq e$ (la fonction $\ln$ étant croissante). L'intersection de $x > 0$ et $x \leq e$ donne

$$D_f =]0, e].$$

b)

Antécédent de 0 : $f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$. L'antécédent de 0 est $\boxed{e}$ (il appartient bien à D_f).

Exo 11

$$f_m(x) = \sqrt{x^2 - 2x + m}.$$

a)

Pour $m = 1$: $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0$ pour tout x , et la racine d'un carré existe toujours. Donc

$$\boxed{D_f = \mathbb{R}}.$$

b)

$D_f = \mathbb{R}$ signifie que $x^2 - 2x + m \geq 0$ pour *tout* x . Ce trinôme (de coefficient dominant $1 > 0$) reste ≥ 0 partout si et seulement si son discriminant est ≤ 0 :

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(m) = 4 - 4m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 1.$$

$$\boxed{D_f = \mathbb{R} \iff m \geq 1}.$$

c)

Pour $m = 0$: $x^2 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x(x - 2) \geq 0$, produit ≥ 0 à l'extérieur des racines 0 et 2 (incluses).

$$\boxed{D_{f_0} =] - \infty, 0] \cup [2, +\infty[}.$$

Exo 12

$$f(x) = e^{2x} - 3e^x + 2.$$

a)

En posant $X = e^x$, on a $e^{2x} = (e^x)^2 = X^2$. L'équation $f(x) = 0$ devient $X^2 - 3X + 2 = 0$, avec la contrainte $X = e^x > 0$.

b)

$X^2 - 3X + 2 = 0$ se factorise en $(X - 1)(X - 2) = 0$, d'où $X = 1$ ou $X = 2$ (toutes deux > 0). On revient à x :

$$e^x = 1 \Rightarrow x = 0, \quad e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2.$$

Les antécédents de 0 par f sont $\boxed{0 \text{ et } \ln 2}$.

Exo 13

a)

La racine est au dénominateur : il faut $|x| - 1 > 0$ (strict), soit $|x| > 1 \Leftrightarrow x < -1$ ou $x > 1$.

$$D_f =] - \infty, -1[\cup]1, +\infty[.$$

b)

Ici la racine n'est pas au dénominateur : $|x| - 1 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -1$ ou $x \geq 1$.

$$D_g =] - \infty, -1] \cup [1, +\infty[.$$

Les bornes -1 et 1 sont *incluses* pour g mais *exclues* pour f (division interdite en ces points).

Exo 14

a)

Trois conditions se cumulent :

- racine au numérateur : $t \geq 0$;
- logarithme : $5 - t > 0 \Leftrightarrow t < 5$;
- dénominateur : $\ln(5 - t) \neq 0 \Leftrightarrow 5 - t \neq 1 \Leftrightarrow t \neq 4$.

b)

L'intersection de $t \geq 0$, $t < 5$ et $t \neq 4$ donne

$$D_f = [0, 4[\cup]4, 5[.$$

Le point $t = 4$ est exclu car le logarithme y vaut 0 : on diviserait par 0.

Exo 15

a)

Pour tout réel x , $(|x| - 1)^2 \geq 0$, c'est-à-dire $x^2 - 2|x| + 1 \geq 0$, donc $1 + x^2 \geq 2|x| = |2x|$. Comme $1 + x^2 > 0$, on peut diviser :

$$\frac{|2x|}{1 + x^2} \leq 1, \quad \text{soit} \quad -1 \leq \frac{2x}{1 + x^2} \leq 1.$$

b)

L'argument de $\arcsin$ reste toujours dans $[-1, 1]$: la condition d'existence est satisfaite pour tout réel x .
De plus $1 + x^2$ ne s'annule jamais. Donc

$$D_f = \mathbb{R}.$$



Tous les exos cochés ? Passe au niveau réel.

+

Ce carnet est un extrait de notre bibliothèque d'entraînement — la suite se joue en ligne.

Sur simulationconcours.be

- ✓ Le même carnet en interactif, avec correction en un clic
- ✓ Les autres mécaniques de la fiche, niveau par niveau
- ✓ 3100 QCM type concours, corrigés et expliqués
- ✓ Les cours complets — gratuits — et les fiches de révision

Tous les jeudis : simulation du concours en ligne

En conditions réelles — chrono, QCM type concours et score immédiat.



Rejoins-nous sur simulationconcours.be

scanne le QR ou tape l'adresse — les cours complets sont gratuits