



simulationconcours.be



Mathématiques

Carnet d'entraînement



Parité, symétries & périodicité

Les fonctions · Mécanique 2 — des exercices calibrés
concours, du plus simple au plus retors.

45 exercices

3 niveaux

corrigés détaillés

Comment bosser ce carnet

- ✓ Lis d'abord le tutoriel : la mécanique y est expliquée pas à pas
- ✓ Fais chaque niveau en entier **avant** d'ouvrir les corrigés
- ✓ Note à côté de chaque exo : réussi, hésité ou raté — et rejoue les ratés 48 h plus tard



simulationconcours.be

scanne & continue en ligne

Sommaire

- 1 Le tutoriel — la mécanique expliquée
- 2 Les exercices Facile x15 · Moyen x15 · Difficile x15
- 3 Les corrigés détaillés exercice par exercice

Le tutoriel

Ce document est un **carnet d'exercices** : on t'explique d'abord la mécanique, puis tu la travailles sur 45 exercices classés en trois niveaux. Les corrigés détaillés t'attendent en deuxième partie, après la page « Corrigés » — pas avant de l'avoir mérité.

*1. Parité : paire, impaire, ou ni l'un ni l'autre

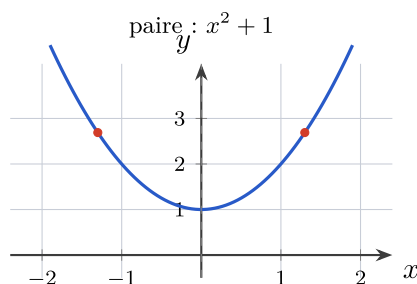
🔗 L'ESSENTIEL le test se fait toujours sur $f(-x)$

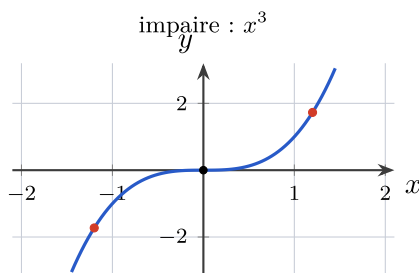
On calcule $f(-x)$, puis on compare :

- si $f(-x) = f(x)$: f est **paire** — courbe symétrique par rapport à l'axe des y ;
- si $f(-x) = -f(x)$: f est **impaire** — courbe symétrique par rapport à l'origine $(0; 0)$;
- sinon : f n'est **ni paire ni impaire** (le cas le plus fréquent !).

⚠️ PIÈGE

« Paire » et « impaire » ne couvrent pas tous les cas. Pour prouver qu'une fonction n'est *ni l'une ni l'autre*, il suffit d'un contre-exemple : par exemple pour $f(x) = 2x + 1$, $f(1) = 3$ mais $f(-1) = -1$, donc $f(-1) \neq f(1)$ et $f(-1) \neq -f(1) = -3$.





*2. Axe et centre de symétrie

L'ESSENTIEL

- **Axe de symétrie** $x = a$: $f(a - x) = f(a + x)$ pour tout x . Pour une parabole $ax^2 + bx + c$: axe $x = -\frac{b}{2a}$.
- **Centre de symétrie** $(a; b)$: $f(a - x) + f(a + x) = 2b$ pour tout x (invariance par demi-tour).

EXEMPLE

$f(x) = x^3 + 2$ admet le centre $(0; 2)$: $f(-x) + f(x) = (-x^3 + 2) + (x^3 + 2) = 4 = 2 \times 2$.

*3. Périodicité

f est **périodique de période T** si $f(x + T) = f(x)$ pour tout x (T = plus petit décalage > 0 qui laisse la courbe inchangée). Le motif se répète tous les T .

L'ESSENTIEL périodes à connaître

$\sin x$ et $\cos x$: $T = 2\pi$. $\tan x$: $T = \pi$. $\sin(kx)$ et $\cos(kx)$: $T = \frac{2\pi}{k}$. $|\sin x|$: $T = \pi$.

EXEMPLE

$\sin(2x)$ a pour période $T = \pi$ car $\sin(2(x + \pi)) = \sin(2x + 2\pi) = \sin(2x)$.

Les exercices

FACILE 15 exercices**Exo 1**

$$f(x) = x^2 - 3.$$

Exo 2

$$f(x) = x^3 + x.$$

Exo 3

$$f(x) = 2x + 1.$$

Exo 4

$$f(x) = |x|.$$

Exo 5

$$f(x) = x^2 + x.$$

Exo 6

$$f(x) = -x^2 + 4.$$

Exo 7

$$f(x) = x^5 - x^3.$$

Exo 8

$$f(x) = 3x.$$

Exo 9

$$f(x) = 4 \text{ (fonction constante).}$$

Exo 10

$$f(x) = x|x|.$$

Exo 11

Sans calcul, donner la période de chacune des fonctions suivantes.

a)

$$x \mapsto \sin x ;$$

b)

$$x \mapsto \cos x ;$$

c)

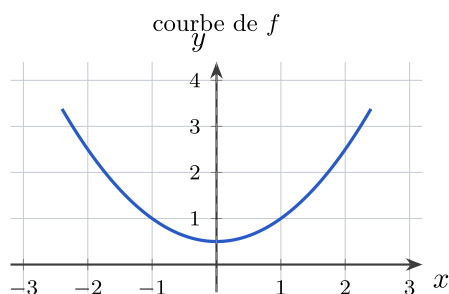
$$x \mapsto \tan x.$$

Exo 12

$$f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Exo 13

Par lecture graphique de la courbe ci-dessous, dire si f est paire, impaire, ou ni l'une ni l'autre. Justifier par la symétrie observée.

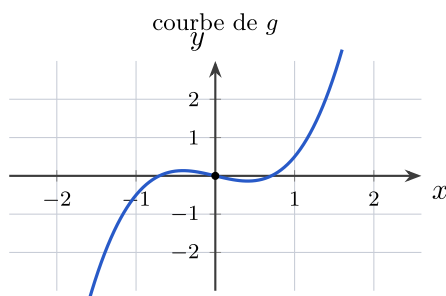


Exo 14

$$f(x) = x^2 + |x|.$$

Exo 15

Par lecture graphique de la courbe ci-dessous, dire si g est paire, impaire, ou ni l'une ni l'autre. Justifier par la symétrie observée.



MOYEN 15 exercices

Exo 1

Soit $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

a)

Déterminer l'équation de l'axe de symétrie à l'aide de la formule $x = -\frac{b}{2a}$.

b)

Vérifier par le calcul que $f(3 - x) = f(3 + x)$.

Exo 2

Pour les fonctions $\cos$ et $\tan$, préciser la parité et la période. Justifier brièvement chaque réponse.

Exo 3

Soit $f(x) = x^3 + 2$. Montrer que le point $(0; 2)$ est un centre de symétrie de la courbe de f .

Exo 4

Montrer que $f(x) = \sin(2x)$ est périodique de période $T = \pi$.

Exo 5

Montrer que $f(x) = \frac{1}{x}$ est impaire, et en déduire un centre de symétrie de son graphe.

Exo 6

Soit $f(x) = \cos(3x)$. Montrer que f est périodique de période $T = \frac{2\pi}{3}$.

Exo 7

Soit $f(x) = (x - 2)^3$. Montrer que le point $(2; 0)$ est un centre de symétrie de la courbe de f .

Exo 8

Soit $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Étudier la parité de f .

Exo 9

Soit $f(x) = \cos x + x^2$. Montrer que f est paire (on pourra raisonner sur la parité de chaque terme).

Exo 10

Soit $f(x) = |\cos x|$. Montrer que π est une période de f .

Exo 11

La courbe de $f(x) = x^2 + 6x + 11$ admet un axe de symétrie vertical.

a)

Déterminer l'équation de cet axe à l'aide de la formule $x = -\frac{b}{2a}$.

b)

En déduire l'ordonnée du sommet de la parabole.

Exo 12

Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Montrer que le point $(0; 1)$ est un centre de symétrie de la courbe de f .

Exo 13

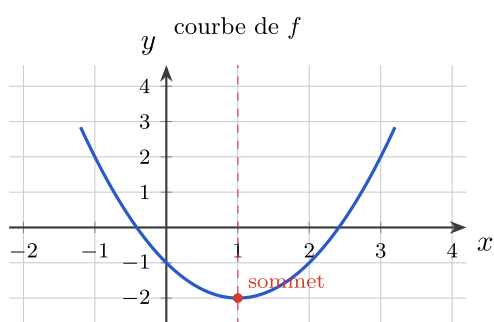
On donne ci-dessous la courbe d'une fonction f .

a)

Lire l'équation de son axe de symétrie vertical.

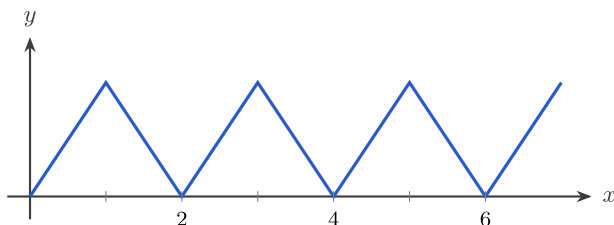
b)

f est-elle paire, impaire, ou ni l'une ni l'autre ? Justifier.



Exo 14

La courbe ci-dessous représente un signal périodique. Déterminer graphiquement sa période T .



Exo 15

Soit $f(x) = x + \sin x$. Étudier la parité de f .

DIFFICILE

15 exercices

Exo 1

Soit $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$.

a)

Montrer que f est paire.

b)

Que peut-on en déduire pour l'axe de symétrie de sa courbe ?

c)

En remarquant que $f(x) = (x^2 - 1)^2$, déterminer les racines de f .

Exo 2

Soit $f(x) = x^2 + 4x + 7$.

a)

Déterminer l'axe de symétrie de la parabole.

b)

Écrire f sous forme canonique $a(x - \alpha)^2 + \beta$ et en déduire le sommet.

Exo 3

On pose $g(x) = \cos^4 x - \sin^4 x$.

a)

Montrer que $g(x) = \cos(2x)$. *Indication : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.*

b)

En déduire la période de g .

Exo 4

Soit $f(x) = \sin x + \cos x$.

a)

À l'aide d'une formule d'addition, montrer que $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

b)

En déduire la période de f .

c)

f est-elle paire, impaire, ou ni l'une ni l'autre ?

Exo 5

Mise en situation. Un signal est modélisé par $f(x) = |\sin x|$.

a)

Montrer que f est paire.

b)

Montrer que sa période est $T = \pi$ (et non 2π).

Exo 6

a)

Montrer que le produit de deux fonctions impaires est une fonction paire.

b)

En déduire la parité de $h(x) = x^3 \sin x$.

Exo 7

Pour une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, on pose $P(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $I(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$.

a)

Montrer que P est paire, que I est impaire, et que $f = P + I$.

b)

Appliquer à $f(x) = x^2 + 2x$: déterminer sa partie paire P et sa partie impaire I .

Exo 8

Soit $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.

a)

Déterminer le domaine de définition de f .

b)

Montrer que le point $(1; 2)$ est un centre de symétrie de la courbe de f .

Exo 9

Soit $f(x) = \cos^2 x$.

a)

À l'aide de la formule $\cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1$, montrer que $f(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$.

b)

En déduire la période de f .

c)

f est-elle paire ou impaire ?

Exo 10

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

a)

Développer $g(x) = f(x+1)$ et montrer que $g(x) = x^3 - x$. Quelle est la parité de g ?

b)

En déduire que la courbe de f admet un centre de symétrie dont on donnera les coordonnées.

Exo 11

Soit $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

a)

Déterminer le domaine de définition de f et vérifier qu'il est symétrique par rapport à 0.

b)

Montrer que f est impaire.

Exo 12

On sait que f est une fonction **impaire**. On ne connaît sa courbe que sur $[0 ; 4]$ (ci-dessous).

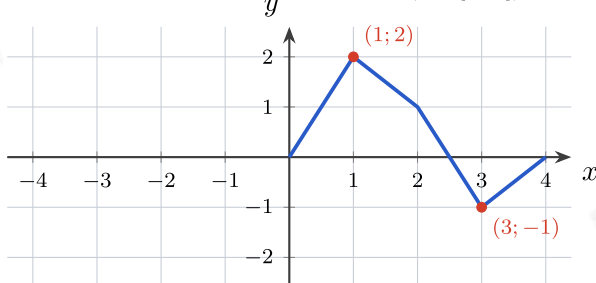
a)

Déterminer $f(-1)$ et $f(-3)$.

b)

Que vaut nécessairement $f(0)$ pour une fonction impaire ?

partie connue de la courbe de f (sur $[0 ; 4]$)



Exo 13

Soit $f(x) = |\sin x| + |\cos x|$.

a)

Montrer que f est paire.

b)

Montrer que $\frac{\pi}{2}$ est une période de f .

Exo 14

Montrer que la seule fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui soit à la fois paire et impaire est la fonction nulle. En déduire qu'une fonction non nulle ne peut pas être simultanément paire et impaire.

Exo 15

Mise en situation. Un signal est modélisé par $g(x) = 2 \sin x \cos x$.

a)

Montrer que $g(x) = \sin(2x)$.

b)

En déduire la période et la parité de g .



DEUXIÈME PARTIE

Corrigés

Chaque exercice repris pas à pas, niveau par niveau.
Compare ta démarche, pas seulement ton résultat.





Une seconde – avant d'ouvrir le corrigé...



Si ce carnet t'aide, rends-nous la pareille : parle de simulationconcours.be à quelqu'un qui prépare le concours. C'est comme ça qu'on peut continuer.

Ce qu'on a préparé pour toi

- ✓ Ce carnet en interactif, avec correction en un clic
- ✓ Les cours complets, chapitre par chapitre – gratuits
- ✓ 3100 QCM type concours, corrigés et expliqués
- ✓ Des fiches de révision à imprimer

Tous les jeudis : simulation du concours en ligne

En conditions réelles – chrono, QCM type concours et score immédiat.



Rejoins-nous sur simulationconcours.be

scanne le QR ou tape l'adresse – puis reviens vérifier tes réponses

Les corrigés

FACILE 15 exercices

Exo 1

$f(-x) = (-x)^2 - 3 = x^2 - 3 = f(x)$. Donc f est **paire** (axe de symétrie : l'axe des y).

Exo 2

$f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x)$. Donc f est **impaire** (centre de symétrie : l'origine).

Exo 3

$f(-x) = 2(-x) + 1 = -2x + 1$. Or $f(x) = 2x + 1$ et $-f(x) = -2x - 1$. On a $f(-x) \neq f(x)$ et $f(-x) \neq -f(x)$. Contre-exemple : $f(1) = 3$, $f(-1) = -1$. Donc f n'est **ni paire ni impaire**.

Exo 4

$f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$. Donc f est **paire**.

Exo 5

$f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$. Or $f(x) = x^2 + x$ et $-f(x) = -x^2 - x$. Ni égalité. Contre-exemple : $f(1) = 2$, $f(-1) = 0$: $f(-1) \neq f(1)$ et $f(-1) \neq -f(1) = -2$. Donc f n'est **ni paire ni impaire**.

Exo 6

$f(-x) = -(-x)^2 + 4 = -x^2 + 4 = f(x)$. Donc f est **paire** (axe de symétrie : l'axe des y).

Exo 7

$f(-x) = (-x)^5 - (-x)^3 = -x^5 + x^3 = -(x^5 - x^3) = -f(x)$. Donc f est **impaire**.

Exo 8

$f(-x) = 3(-x) = -3x = -f(x)$. Donc f est **impaire**.

Exo 9

$f(-x) = 4 = f(x)$: f est **paire**. (Une fonction constante non nulle est paire mais pas impaire, car $4 \neq -4$.)

Exo 10

$f(-x) = (-x)|-x| = (-x)|x| = -x|x| = -f(x)$. Donc f est **impaire**.

Exo 11

a)

$\sin$: période $T = 2\pi$.

b)

$\cos$: période $T = 2\pi$.

c)

$\tan$: période $T = \pi$ (et non 2π).

Exo 12

$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2} = f(x)$. Donc f est **paire**.

Exo 13

La courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ($x = 0$) : f est **paire**.

Exo 14

$f(-x) = (-x)^2 + |-x| = x^2 + |x| = f(x)$. Donc f est **paire**.

Exo 15

La courbe est symétrique par rapport à l'origine $(0; 0)$: g est **impaire**.

MOYEN

15 exercices

Exo 1

$f(x) = x^2 - 6x + 5$, donc $a = 1, b = -6$.

a)

Axe de symétrie : $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2} = \boxed{3}$.

b)

$f(3-x) = (3-x)^2 - 6(3-x) + 5 = 9 - 6x + x^2 - 18 + 6x + 5 = x^2 - 4$.

$f(3+x) = (3+x)^2 - 6(3+x) + 5 = 9 + 6x + x^2 - 18 - 6x + 5 = x^2 - 4$.

Les deux sont égaux : $f(3-x) = f(3+x)$, l'axe $x = 3$ est bien axe de symétrie.

Exo 2

- $\cos$: **paire** car $\cos(-x) = \cos x$; **période** $T = 2\pi$ car $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.
- $\tan$: **impaire** car $\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$; **période** $T = \pi$ (et non 2π) car $\tan(x + \pi) = \tan x$.

Exo 3

On teste $f(0 - x) + f(0 + x) = 2b$ avec $a = 0, b = 2$:

$$f(-x) + f(x) = ((-x)^3 + 2) + (x^3 + 2) = -x^3 + 2 + x^3 + 2 = 4 = 2 \times 2.$$

La relation $f(a - x) + f(a + x) = 2b$ est vérifiée avec $(a; b) = (0; 2)$: $(0; 2)$ est un **centre de symétrie**.

Exo 4

$f(x + \pi) = \sin(2(x + \pi)) = \sin(2x + 2\pi) = \sin(2x) = f(x)$ pour tout x . Donc f est périodique et π est une période. C'est la *plus petite* : $T = \pi$.

Exo 5

$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$: f est **impaire**. Une fonction impaire admet l'**origine** $(0; 0)$ pour centre de symétrie ; le graphe de $\frac{1}{x}$ (hyperbole) est donc symétrique par rapport à O .

Exo 6

Pour tout x , $f(x + \frac{2\pi}{3}) = \cos(3x + 2\pi) = \cos(3x) = f(x)$. Donc $\frac{2\pi}{3}$ est une période ; c'est la plus petite : $T = \frac{2\pi}{3}$. (Règle : $\cos(kx)$ a pour période $\frac{2\pi}{k}$, ici $k = 3$.)

Exo 7

On teste $f(2 - x) + f(2 + x) = 2b$ avec le centre candidat $(a; b) = (2; 0)$:

$$f(2 - x) + f(2 + x) = (2 - x - 2)^3 + (2 + x - 2)^3 = (-x)^3 + x^3 = -x^3 + x^3 = 0 = 2 \times 0.$$

La relation est vérifiée pour tout x : $(2; 0)$ est un **centre de symétrie**.

Exo 8

$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 + 1} = \frac{-x}{x^2 + 1} = -\frac{x}{x^2 + 1} = -f(x)$. Donc f est **impaire**.

Exo 9

$f(-x) = \cos(-x) + (-x)^2 = \cos x + x^2 = f(x)$. Donc f est **paire**. (Somme de deux fonctions paires, $\cos$ et $x \mapsto x^2$: le résultat est pair.)

Exo 10

$f(x + \pi) = |\cos(x + \pi)| = |-\cos x| = |\cos x| = f(x)$ pour tout x . Donc π est une période de f .

Exo 11

$$f(x) = x^2 + 6x + 11, a = 1, b = 6.$$

a)

$$\text{Axe : } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2} = \boxed{-3}.$$

b)

$$\text{Ordonnée du sommet : } f(-3) = (-3)^2 + 6 \times (-3) + 11 = 9 - 18 + 11 = \boxed{2}. \text{ Sommet } (-3; 2).$$

Exo 12

On teste $f(-x) + f(x) = 2b$ avec $(a; b) = (0; 1)$:

$$f(-x) + f(x) = ((-x)^3 - 3(-x) + 1) + (x^3 - 3x + 1) = (-x^3 + 3x + 1) + (x^3 - 3x + 1) = 2 = 2 \times 1.$$

Donc $(0; 1)$ est un **centre de symétrie**.

Exo 13

a)

Le sommet a pour abscisse 1 : l'axe de symétrie est $\boxed{x = 1}$.

b)

L'axe de symétrie n'est pas l'axe des ordonnées ($x = 1 \neq 0$) et la courbe n'est pas symétrique par rapport à l'origine : f n'est **ni paire ni impaire**.

Exo 14

Le motif (une « dent ») se reproduit à l'identique tous les 2 unités d'abscisse : $\boxed{T = 2}$.

Exo 15

$f(-x) = (-x) + \sin(-x) = -x - \sin x = -(x + \sin x) = -f(x)$. Donc f est **impaire**. (Somme de deux fonctions impaires, $x \mapsto x$ et $\sin$.)

DIFFICILE

15 exercices

Exo 1

a)

$$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 1 = f(x) : f \text{ est } \textbf{paire}.$$

b)

Une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées : l'**axe de symétrie est** $x = 0$.

c)

$$f(x) = (x^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1. \text{ Racines : } \boxed{x = -1 \text{ et } x = 1} \text{ (chacune double).}$$

Exo 2

$$f(x) = x^2 + 4x + 7, a = 1, b = 4.$$

a)

$$\text{Axe : } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2} = \boxed{-2}.$$

b)

Forme canonique : $x^2 + 4x + 7 = (x + 2)^2 - 4 + 7 = (x + 2)^2 + 3$. Donc $f(x) = (x - (-2))^2 + 3$, sommet $\boxed{(-2; 3)}$. (Cohérent : abscisse du sommet = -2 = axe de symétrie.)

Exo 3

a)

On factorise la différence de deux carrés :

$$\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x).$$

Or $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$ (formule de duplication). Donc $g(x) = \cos(2x)$.

b)

$\cos(2x)$ a pour période $\frac{2\pi}{2} = \pi$. Donc $\boxed{T = \pi}$.

Exo 4

a)

Formule d'addition : $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sin x + \cos x = f(x)$.

b)

$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ a pour période 2π ; le facteur $\sqrt{2}$ et le décalage $\frac{\pi}{4}$ ne changent pas la période. Donc $\boxed{T = 2\pi}$.

c)

On teste en $x = \frac{\pi}{4}$: $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}$, tandis que $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin(0) = 0$. Comme $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0$ vaut ni $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ ni $-f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$, la fonction f n'est **ni paire ni impaire**.

Exo 5

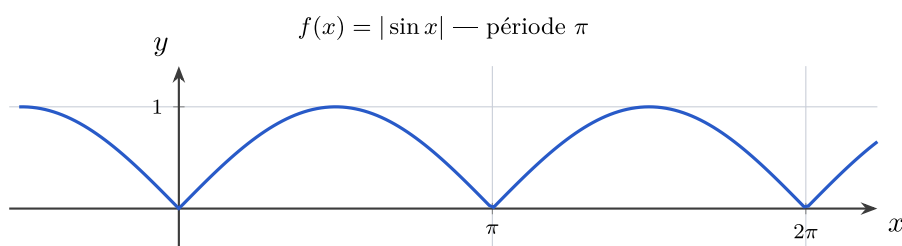
a)

$$f(-x) = |\sin(-x)| = |-\sin x| = |\sin x| = f(x) : f \text{ est } \textbf{paire}.$$

b)

$f(x + \pi) = |\sin(x + \pi)| = |-\sin x| = |\sin x| = f(x) : \pi$ est une période. Elle est plus petite que 2π : la valeur absolue « replie » les arches négatives du sinus vers le haut, ce qui double la fréquence apparente.

Donc $T = \pi$.



Exo 6

a)

Soit u et v deux fonctions impaires et $p = uv$. Alors

$$p(-x) = u(-x)v(-x) = (-u(x))(-v(x)) = u(x)v(x) = p(x).$$

Donc p est **paire**.

b)

$x \mapsto x^3$ et $x \mapsto \sin x$ sont impaires : leur produit h est donc **pair**. Vérification : $h(-x) = (-x)^3 \sin(-x) = (-x^3)(-\sin x) = x^3 \sin x = h(x)$.

Exo 7

a)

$$P(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = P(x) : P \text{ est paire.}$$

$$I(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -I(x) : I \text{ est impaire.}$$

$$\text{Enfin } P(x) + I(x) = \frac{(f(x) + f(-x)) + (f(x) - f(-x))}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x).$$

b)

Ici $f(-x) = (-x)^2 + 2(-x) = x^2 - 2x$. Donc

$$P(x) = \frac{(x^2 + 2x) + (x^2 - 2x)}{2} = x^2, \quad I(x) = \frac{(x^2 + 2x) - (x^2 - 2x)}{2} = 2x.$$

Partie paire : $P(x) = x^2$; partie impaire : $I(x) = 2x$.

Exo 8

a)

Le dénominateur $x - 1$ s'annule en $x = 1$: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b)

Prenons le centre candidat $(a; b) = (1; 2)$. Pour tout $t \neq 0$:

$$f(1+t) = \frac{2(1+t)+1}{(1+t)-1} = \frac{2t+3}{t} = 2 + \frac{3}{t}, \quad f(1-t) = \frac{2(1-t)+1}{(1-t)-1} = \frac{3-2t}{-t} = 2 - \frac{3}{t}.$$

Donc $f(1-t) + f(1+t) = (2 - \frac{3}{t}) + (2 + \frac{3}{t}) = 4 = 2 \times 2$: $(1; 2)$ est un **centre de symétrie**.

Exo 9

a)

De $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ on tire $2\cos^2 x = 1 + \cos(2x)$, d'où $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$.

b)

$\cos(2x)$ a pour période $\frac{2\pi}{2} = \pi$; ajouter la constante 1 puis diviser par 2 ne change pas la période. Donc

$$T = \pi.$$

c)

$f(-x) = \cos^2(-x) = (\cos x)^2 = \cos^2 x = f(x)$: f est **paire**.

Exo 10

a)

$g(x) = f(x+1) = (x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 2(x+1)$. En développant :

$$(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - 3(x^2 + 2x + 1) + (2x + 2) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 3x^2 - 6x - 3 + 2x + 2 = x^3 - x.$$

Comme $g(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -g(x)$, g est **impaire**.

b)

g impaire est symétrique par rapport à l'origine. Or la courbe de f se déduit de celle de g par une translation de 1 vers la droite : le centre de symétrie de f est donc $(1; g(0)) = (1; f(1))$. Comme $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$, le centre est $\boxed{(1; 0)}$.

Exo 11

a)

f existe si et seulement si $\frac{1+x}{1-x} > 0$, c'est-à-dire $-1 < x < 1$. Donc $D_f =]-1; 1[$, intervalle centré en 0 : il est symétrique par rapport à 0.

b)

Pour tout $x \in D_f$:

$$f(-x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \ln\left(\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}\right) = -\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -f(x).$$

Donc f est **impaire**.

Exo 12

a)

La courbe donnée indique $f(1) = 2$ et $f(3) = -1$. Comme f est impaire, $f(-x) = -f(x)$, donc $f(-1) = -f(1) = \boxed{-2}$ et $f(-3) = -f(3) = \boxed{1}$.

b)

Pour $x = 0$, l'imparité donne $f(-0) = -f(0)$, soit $f(0) = -f(0)$, d'où $2f(0) = 0$ et $\boxed{f(0) = 0}$.

Exo 13

a)

$f(-x) = |\sin(-x)| + |\cos(-x)| = |-\sin x| + |\cos x| = |\sin x| + |\cos x| = f(x)$: f est **paire**.

b)

$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \left|\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| + \left|\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| = |\cos x| + |-\sin x| = |\cos x| + |\sin x| = f(x)$. Donc $\frac{\pi}{2}$ est une période de f .

Exo 14

Supposons f paire et impaire. Alors pour tout x : $f(-x) = f(x)$ (parité) et $f(-x) = -f(x)$ (imparité). En égalant les deux : $f(x) = -f(x)$, donc $2f(x) = 0$, soit $f(x) = 0$ pour tout x . La seule fonction à la fois paire et impaire est donc la **fonction nulle**. Par conséquent, dès qu'une fonction prend une valeur non nulle en un point, elle ne peut pas être simultanément paire et impaire.

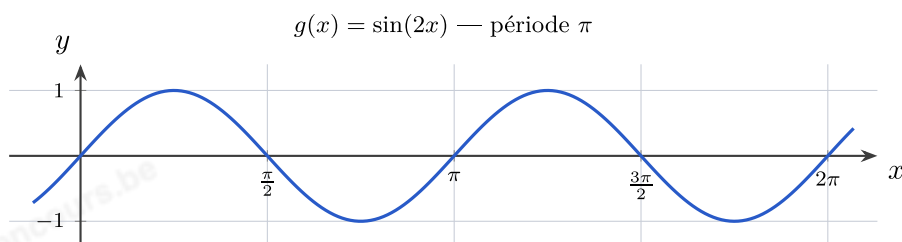
Exo 15

a)

Formule de duplication : $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$. Donc $g(x) = \sin(2x)$.

b)

$\sin(2x)$ a pour période $\frac{2\pi}{2} = \pi$: $T = \pi$. De plus $g(-x) = \sin(-2x) = -\sin(2x) = -g(x)$, donc g est **impaire**.





Tous les exos cochés ? Passe au niveau réel.

+

Ce carnet est un extrait de notre bibliothèque d'entraînement — la suite se joue en ligne.

Sur simulationconcours.be

- ✓ Le même carnet en interactif, avec correction en un clic
- ✓ Les autres mécaniques de la fiche, niveau par niveau
- ✓ 3100 QCM type concours, corrigés et expliqués
- ✓ Les cours complets — gratuits — et les fiches de révision

Tous les jeudis : simulation du concours en ligne

En conditions réelles — chrono, QCM type concours et score immédiat.



Rejoins-nous sur simulationconcours.be

scanne le QR ou tape l'adresse — les cours complets sont gratuits