



simulationconcours.be

Mathématiques

Carnet d'entraînement

Notations, lecture graphique,⁺ calcul direct & continuité

Les limites · Mécanique 1 — des exercices calibrés concours, du plus simple au plus retors.

43 exercices

3 niveaux

corrigés détaillés

Comment bosser ce carnet

- ✓ Lis d'abord le tutoriel : la mécanique y est expliquée pas à pas
- ✓ Fais chaque niveau en entier **avant** d'ouvrir les corrigés
- ✓ Note à côté de chaque exo : réussi, hésité ou raté — et rejoue les ratés 48 h plus tard



simulationconcours.be

scanne & continue en ligne

Sommaire

- 1 Le tutoriel — la mécanique expliquée
- 2 Les exercices Facile x15 · Moyen x15 · Difficile x13
- 3 Les corrigés détaillés exercice par exercice

Le tutoriel

Ce document est un **carnet d'exercices** : on t'explique d'abord la mécanique, puis tu la travailles sur 43 exercices classés en trois niveaux. Les corrigés détaillés t'attendent en deuxième partie, après la page « Corrigés » — pas avant de l'avoir mérité.

MÉMO Thème 1 — Notations, lecture graphique & calcul direct

Mécanique travaillée : lire une notation de limite, calculer une limite par remplacement direct quand la fonction est définie, distinguer *limite à gauche* et *limite à droite*, et relier tout cela à la *continuité* en un point (et à la lecture d'un graphe).

1. Que veut dire « $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ » ?

Étudier une limite, c'est répondre à : « vers quelle valeur se rapproche $f(x)$ quand x se rapproche de la cible ? » La cible est soit un nombre x_0 , soit $+\infty$, soit $-\infty$. On ne demande pas forcément la valeur *au* point : on regarde le comportement *autour*.

L'ESSENTIEL décoder la notation

Dans $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$:

- ce qui est *sous* le $\lim (x \rightarrow x_0)$ indique **comment bouge la variable** ;
- le résultat à droite (ℓ) est **la valeur-cible** de $f(x)$: un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$.

2. Calcul direct par remplacement

La plupart des fonctions usuelles (polynômes, $\sin$, $\cos$, $\exp$, $\ln$, $\sqrt{}$, et les quotients là où le dénominateur ne s'annule pas) sont **continues sur leur domaine**. Pour elles, calculer $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ avec $x_0 \in D_f$ revient simplement à **remplacer x par x_0** .

☞ **MÉTHODE** calcul direct d'une limite en un point du domaine

- 1 Vérifier que x_0 appartient au domaine D_f (pas de division par 0, pas de racine de négatif...).
- 2 Remplacer chaque x par x_0 et calculer.

💡 **EXEMPLE** remplacement immédiat

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 5x + 1) = 2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 1 = 18 - 15 + 1 = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2}{3} = \frac{0 + 2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Les propriétés des limites (la limite d'une somme est la somme des limites, celle d'un produit le produit des limites, celle d'un quotient le quotient *si le dénominateur ne tend pas vers 0*) justifient ce remplacement.

3. Limite à gauche et limite à droite

Parfois f ne se comporte pas pareil selon le côté d'où l'on arrive. On note :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \text{ (par la **droite**, } x > x_0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \text{ (par la **gauche**, } x < x_0).$$

✨ **L'ESSENTIEL** existence d'une limite globale

f possède une limite (globale) en x_0 **si et seulement si** les deux limites latérales existent *et sont égales* :

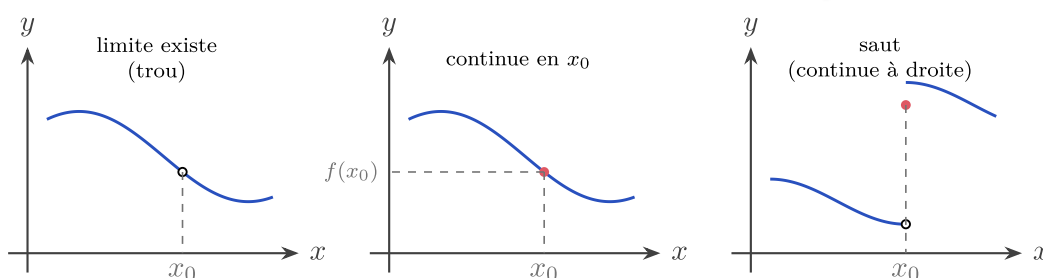
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \implies f \text{ possède une limite en } x_0.$$

Si elles diffèrent, f n'a pas de limite en x_0 .

4. Lien avec la continuité (lecture d'un graphe)

🔗 **L'ESSENTIEL** trois situations en un point x_0

- **Limite qui existe** (mais $x_0 \notin D_f$) : la courbe « pointe » vers une valeur, représentée par un *rond ouvert* (un trou).
- **Continuité en x_0** (avec $x_0 \in D_f$) : les deux limites latérales sont égales et valent $f(x_0)$: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f = f(x_0)$. La courbe passe par le point, sans saut ni trou.
- **Continuité d'un seul côté** : une seule limite latérale colle à $f(x_0)$; la courbe présente un *saut*.



⚠ **ATTENTION** ne pas confondre « valeur » et « tendance »

La limite décrit une *tendance* : elle peut exister même là où f n'est pas définie, et peut différer de $f(x_0)$ lorsque la fonction fait un saut. Toujours vérifier les *deux côtés* avant de conclure qu'une limite globale existe.

💡 **ASTUCE** réflexe de départ

Face à une limite en un point : on *remplace d'abord*. Si le remplacement donne un nombre « franc » (sans division par 0, sans racine interdite), c'est fini. Sinon, on passe aux techniques des thèmes suivants (règle $\frac{a}{0^\pm}$, terme dominant, conjugué, l'Hospital).

Les exercices

FACILE 15 exercices

Exo 1 calcul direct par remplacement

Toutes ces fonctions sont définies au point visé. Calculer chaque limite en remplaçant x par la cible.

a)

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - x + 4)$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + 5}{x^2 + 3}$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x} + x)$$

d)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + 2x - 7)$$

Exo 2 lire et écrire une notation

a)

Traduire en une phrase : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$.

b)

Traduire en une phrase : $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$.

c)

Écrire avec le symbole $\lim$: « lorsque x se rapproche de 5 par la droite, $g(x)$ tend vers 0 ».

Exo 3 limites à gauche et à droite d'une fonction par morceaux

Soit f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 2, \\ 3x - 2 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

a)

Calculer $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ (on utilise le morceau valable pour $x < 2$).

b)

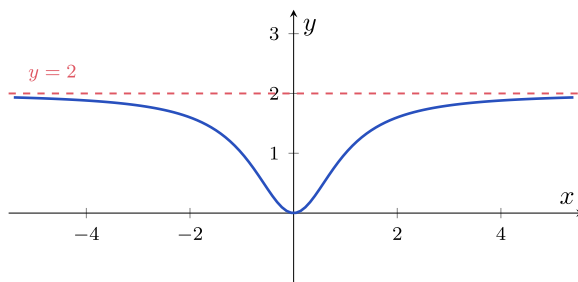
Calculer $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ (on utilise le morceau valable pour $x \geq 2$).

c)

Les deux résultats sont-ils égaux ? f a-t-elle une limite (globale) en 2 ?

Exo 4 lecture graphique

La courbe de f est donnée ci-dessous. Lire graphiquement les limites demandées.



a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = ?$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = ?$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ?$$

Exo 5 vérifier une continuité

$$\text{Soit } g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 3}.$$

a)

Le point $x_0 = 1$ appartient-il au domaine de g ? (le dénominateur s'annule-t-il ?)

b)

$$\text{Calculer } \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \text{ et la valeur } g(1).$$

c)

En déduire si g est continue en 1 (comparer la limite et $g(1)$).

Exo 6 calcul direct : polynômes et quotients définis

Chaque cible appartient au domaine. Calculer par remplacement.

a)

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2x + 5)$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x + 7}{x^2 + 1}$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 1} (5 - 3x + x^2)$$

d)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7 - 2x}{x + 4}$$

Exo 7 calcul direct avec une racine carrée

Les radicandes sont positifs au point visé. Calculer.

a)

$$\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x}}{2}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 25} (\sqrt{x} - x)$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{3x + 1}$$

d)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 + 5}$$

Exo 8 traduire une notation en une phrase

Traduire chaque écriture par une phrase en français courant.

a)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 5$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Exo 9 écrire une limite avec le symbole $\lim$

Traduire chaque phrase par une écriture utilisant le symbole $\lim$.

a)

« Lorsque x tend vers 4, $h(x)$ se rapproche de 7. »

b)

« Lorsque x devient très grand négatif, $f(x)$ tend vers 2. »

c)

« Lorsque x s'approche de 0 par la gauche, $g(x)$ tend vers $+\infty$. »

Exo 10 limites latérales d'une fonction par morceaux

Soit $f(x) =$

$2x-1$ & si $x < 3$, $x+2$ & si $x \geq 3$.

a)

Calculer $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ (morceau valable pour $x < 3$).

b)

Calculer $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ (morceau valable pour $x \geq 3$).

c)

Les deux résultats sont-ils égaux ? f a-t-elle une limite en 3 ?

Exo 11 continuité d'un polynôme en un point

Soit $f(x) = x^2 - 3x + 1$ et le point $x_0 = 2$.

a)

Calculer la valeur $f(2)$.

b)

Calculer $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

c)

En comparant, f est-elle continue en 2 ?

Exo 12 vérifier une continuité : fonction rationnelle

Soit $g(x) = \frac{x+4}{x-1}$ et le point $x_0 = 3$.

a)

Le dénominateur s'annule-t-il en 3 ? Le point 3 appartient-il à D_g ?

b)

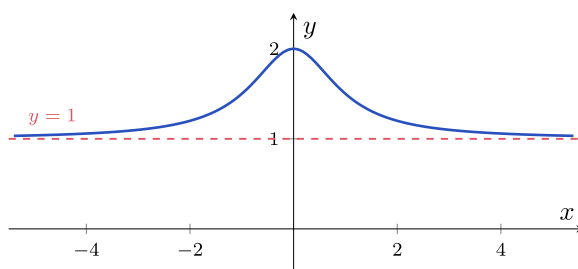
Calculer $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ et la valeur $g(3)$.

c)

En déduire si g est continue en 3.

Exo 13 lecture graphique : asymptote horizontale

La courbe de f est donnée ci-dessous. Lire les limites demandées.



a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = ?$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = ?$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ?$$

Exo 14 peut-on remplacer directement ?

Sans calculer la limite, dire si le point visé appartient au domaine (donc si le remplacement direct est légitime). Justifier en une ligne.

a)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x-5}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x+1}{x-5}$$

c)

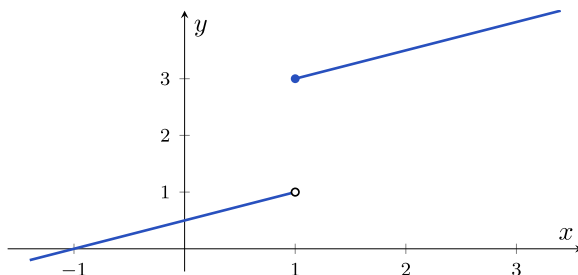
$$\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x+3}$$

d)

$$\lim_{x \rightarrow -4} \sqrt{x+3}$$

Exo 15 lecture graphique : un saut

La courbe de f présente un saut en $x = 1$ (rond plein, rond ouvert). Lire les limites.



a)

Lire $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

b)

Lire $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ainsi que la valeur $f(1)$ (rond plein).

c)

f a-t-elle une limite en 1 ? Justifier.

MOYEN 15 exercices

Exo 1 calcul direct avec fonctions usuelles

Chaque point est visé dans le domaine. Calculer.

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + 3 \cos x)$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + 2}{x + 1}$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (2 \sin x - x)$$

d)

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 5}$$

Exo 2 raccord de deux morceaux

Soit $f(x) =$

$$x^2 + 1 \text{ si } x \leq 1, 4x - 2 \text{ si } x > 1.$$

a)

Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

b)

f possède-t-elle une limite en 1 ? Si oui, laquelle ?

c)

f est-elle continue en 1 ? (comparer avec $f(1)$).

Exo 3 ajuster un paramètre pour la continuité

Soit k un réel et $f(x) =$

$$2x + k \text{ si } x < 3, x^2 \text{ si } x \geq 3.$$

a)

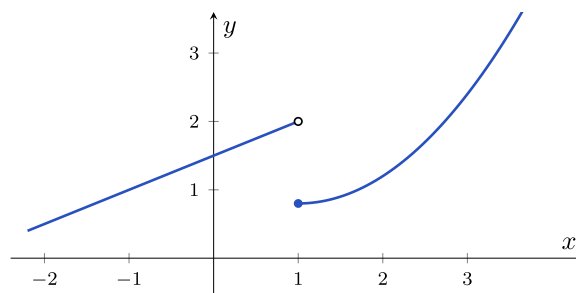
Exprimer $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ en fonction de k , puis $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$.

b)

Déterminer la valeur de k pour que f soit continue en 3.

Exo 4 lecture graphique fine

La courbe de f comporte un rond plein et un rond ouvert au voisinage de $x = 1$.



a)

Lire $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

b)

Quelle est la valeur $f(1)$ (rond plein) ?

c)

f est-elle continue en 1 ? à gauche ? à droite ? Justifier.

Exo 5 vrai / faux justifié

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, en une ligne de justification.

a)

Si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, alors f est continue en x_0 .

b)

Une fonction peut avoir une limite en x_0 sans être définie en x_0 .

c)

Si f est continue en x_0 , alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Exo 6 calcul direct : exponentielle, logarithme, trigonométrie

Chaque point est dans le domaine. Calculer.

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{3x} + 2 \cos x)$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + x}{x^2 + 1}$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (2 \sin x + 1)$$

d)

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x}{x}$$

Exo 7 raccord qui ne se fait pas

Soit $f(x) =$

$x+3$ & si $x < 2$, x^2 & si $x \geq 2$.

a)

Calculer $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ et la valeur $f(2)$.

b)

f possède-t-elle une limite en 2 ?

c)

f est-elle continue en 2 ? continue à droite ? Justifier.

Exo 8 ajuster un coefficient pour la continuité

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f(x) =$

$ax-1$ & si $x \leq 2$, x^2+x & si $x > 2$.

a)

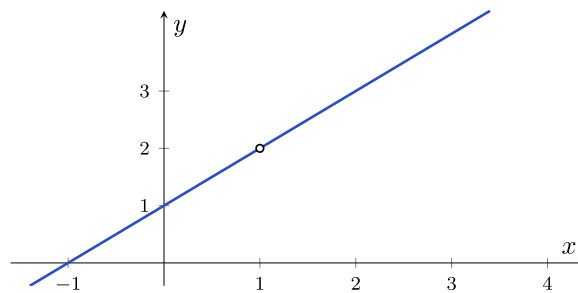
Exprimer $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ (qui vaut aussi $f(2)$) en fonction de a , puis $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$.

b)

Déterminer la valeur de a pour que f soit continue en 2.

Exo 9 lecture graphique : un trou

La courbe de f ci-dessous présente un *trou* (rond ouvert) en $x = 1$: f n'est pas définie en 1.



a)

Lire $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

b)

f possède-t-elle une limite en 1 ? Laquelle ?

c)

f est-elle continue en 1 ? Justifier.

Exo 10 vrai / faux justifié

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, avec une courte justification.

a)

Si $f(x_0)$ existe, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe.

b)

Si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, alors f est continue en x_0 .

c)

Un polynôme est continu en tout point de $\mathbb{R}$.

Exo 11 calcul direct : quotients définis

Chaque dénominateur est non nul au point visé. Calculer.

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\cos x}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x}{e^x}$$

d)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

Exo 12 limite et valeur : comparer

Soit $f(x) =$

$2x+1$ & si $x \leq 1,5$ & si $x > 1,5$.

a)

Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

b)

Donner la valeur $f(1)$.

c)

f est-elle continue en 1 ? Justifier en comparant la limite et $f(1)$.

Exo 13 notations et asymptotes

a)

Traduire $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ par une phrase, puis nommer l'asymptote correspondante et donner son équation.

b)

Traduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ par une phrase, puis nommer l'asymptote correspondante et donner son équation.

c)

Une fonction peut-elle admettre deux asymptotes horizontales distinctes ? Justifier.

Exo 14 fonction à trois morceaux

Soit $f(x) =$

$x+2$ & si $x < 0, 2$ & si $x=0, x^2+3$ & si $x > 0$.

a)

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

b)

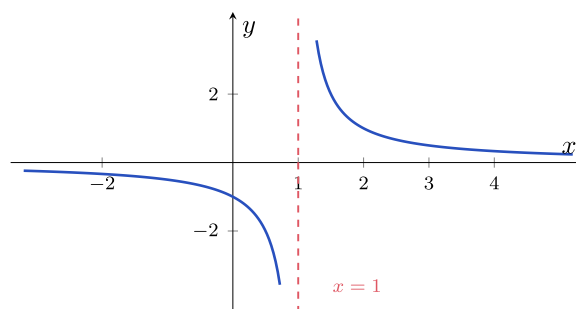
f possède-t-elle une limite en 0 ?

c)

f est-elle continue en 0 ? continue à gauche ? Justifier.

Exo 15 lecture graphique : une branche infinie

La courbe de f ci-dessous possède une asymptote verticale. Lire les limites demandées.



a)

Lire $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

b)

Quelle est la nature de la droite $x = 1$ pour la courbe ?

c)

Lire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; nommer l'asymptote correspondante.

DIFFICILE 13 exercices

Exo 1 une fonction à deux paramètres

Soit a et b deux réels et

$$f(x) = \begin{cases} ax + 1 & \text{si } x < 2, \\ 3 & \text{si } x = 2, \\ x^2 + b & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

a)

Exprimer $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ en fonction de a et b .

b)

Écrire la condition sur a et b pour que f possède une limite en 2.

c)

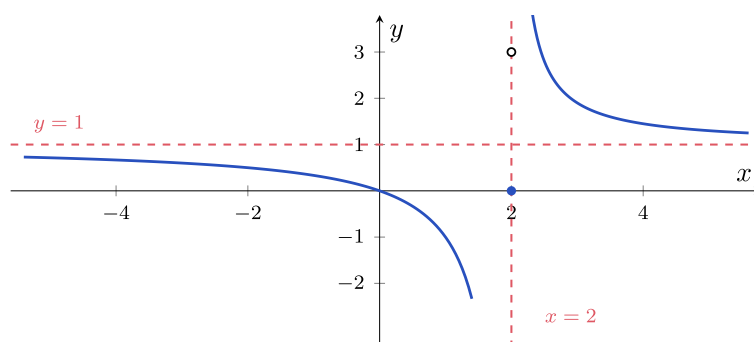
Écrire la (les) condition(s) supplémentaire(s) pour que f soit continue en 2.

d)

En déduire toutes les paires (a, b) rendant f continue en 2, puis donner un exemple numérique.

Exo 2 lecture graphique complète

On donne ci-dessous la courbe d'une fonction f (ronds pleins et ouverts, asymptotes en pointillés).



a)

Donner $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, et nommer l'asymptote correspondante.

b)

Donner $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$; que peut-on en conclure sur l'asymptote verticale ?

c)

Donner $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ et la valeur $f(2)$ (rond plein).

d)

f possède-t-elle une limite en 2 ? est-elle continue en 2 ? à droite ? Justifier chaque réponse.

Exo 3 mise en situation : un tarif par paliers

Une clinique facture une consultation selon la durée t (en minutes). Le montant $M(t)$ (en euros) est :

$$M(t) = \begin{cases} 30 & \text{si } 0 < t \leq 20, \\ 30 + 2(t - 20) & \text{si } t > 20. \end{cases}$$

a)

Calculer $\lim_{t \rightarrow 20^-} M(t)$ et $\lim_{t \rightarrow 20^+} M(t)$.

b)

La fonction montant est-elle continue en $t = 20$? Interpréter concrètement (le tarif « saute »-t-il ?).

c)

Même question au point $t = 20$ si l'on remplace le second morceau par $35 + 2(t - 20)$: la facturation présenterait-elle un saut ? de combien d'euros ?

Exo 4 deux paramètres et une contrainte

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $f(x) =$

$ax+b$ & si $x \leq 2$, x^2+1 & si $x > 2$.

On veut que f soit continue en 2 et que la branche de gauche passe par le point $(0 ; 3)$.

a)

Traduire « la branche de gauche passe par $(0 ; 3)$ » par une équation portant sur a et b .

b)

Exprimer $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ (qui vaut $f(2)$) et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ en fonction de a, b .

c)

Écrire la condition de continuité en 2.

d)

En déduire (a, b) , puis vérifier.

Exo 5 continuité en deux points de raccord

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 0, \\ x^2 + 1 & \text{si } 0 \leq x < 2, \\ ax + b & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

a)

Étudier la continuité en 0 : calculer $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $f(0)$.

b)

Écrire la condition de continuité en 2 (relation entre a et b).

c)

On impose de plus $f(3) = 6$. En déduire a et b .

Exo 6 mise en situation : impôt par tranches

L'impôt I (en euros) dû sur un revenu r (en euros) est

$$I(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq r \leq 10\,000, \\ 0,1(r - 10\,000) & \text{si } 10\,000 < r \leq 25\,000, \\ 1500 + 0,2(r - 25\,000) & \text{si } r > 25\,000. \end{cases}$$

a)

Calculer $\lim_{r \rightarrow 10\,000^-} I(r)$ et $\lim_{r \rightarrow 10\,000^+} I(r)$: le barème est-il continu en 10 000 ?

b)

Calculer $\lim_{r \rightarrow 25\,000^-} I(r)$ et $\lim_{r \rightarrow 25\,000^+} I(r)$: le barème est-il continu en 25 000 ?

c)

Interpréter : le montant de l'impôt fait-il un « saut » quand on franchit un seuil ?

Exo 7 continuité selon la valeur d'un paramètre

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $f(x) =$

x^2 & si $x \leq 1$, $mx + 2$ & si $x > 1$.

a)

Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et $f(1)$.

b)

Exprimer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ en fonction de m .

c)

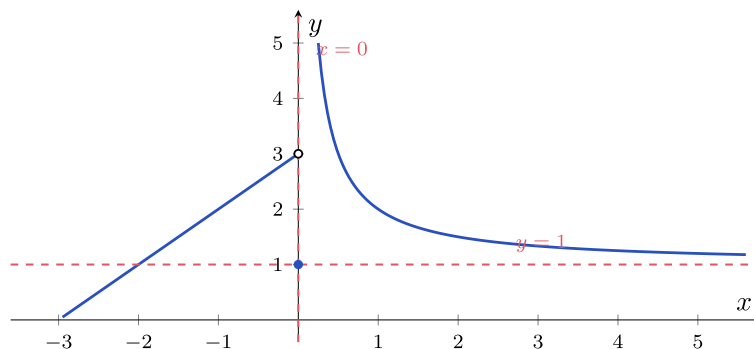
Déterminer m pour que f soit continue en 1.

d)

Pour toute autre valeur de m , f est-elle au moins continue à gauche en 1 ? Justifier.

Exo 8 lecture graphique complète

On donne ci-dessous la courbe d'une fonction f (rond plein, rond ouvert, asymptotes en pointillés).



a)

Donner $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et nommer l'asymptote correspondante (avec son équation).

b)

Donner $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$; qu'en déduit-on sur la droite $x = 0$?

c)

Donner $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ (rond ouvert) et la valeur $f(0)$ (rond plein).

d)

f possède-t-elle une limite en 0 ? est-elle continue en 0 ? à droite ? Justifier chaque réponse.

Exo 9 limite, puis continuité : deux exigences distinctes

Soit $c \in \mathbb{R}$ et $f(x) =$

$2x+c$ & si $x < 0$, 1 & si $x=0$, x^2+4 & si $x > 0$.

a)

Exprimer $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ en fonction de c .

b)

Pour quelle valeur de c la fonction f possède-t-elle une limite en 0 ?

c)

Pour cette valeur de c , f est-elle continue en 0 ? Justifier en comparant à $f(0)$.

d)

Toujours avec cette valeur de c , quelle valeur faudrait-il donner à $f(0)$ pour rendre f continue en 0 ?

Exo 10 synthèse : vrai / faux justifié

Pour chaque affirmation, répondre **Vrai** ou **Faux** et justifier (preuve courte ou contre-exemple).

a)

Si f et g sont continues en x_0 , alors $f + g$ est continue en x_0 .

b)

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe, alors $x_0 \in D_f$.

c)

Si f est continue à gauche et à droite en x_0 , alors f est continue en x_0 .

d)

Si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, alors f est continue en x_0 .

Exo 11 continuité d'une fonction avec valeur absolue

Soit $f(x) = |x - 2| + 1$.

a)

Écrire f sous forme d'une fonction définie par morceaux (selon le signe de $x - 2$).

b)

Calculer $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ et $f(2)$.

c)

f est-elle continue en 2 ? Justifier.

Exo 12 quelle valeur donner au point ?

On considère la fonction g définie pour tout $x \neq 2$ par $g(x) = 3x - 1$, la valeur $g(2)$ restant à fixer.

a)

Calculer $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$.

b)

Quelle valeur faut-il donner à $g(2)$ pour que g soit continue en 2 ?

c)

Si l'on pose au contraire $g(2) = 10$, g possède-t-elle une limite en 2 ? est-elle continue en 2 ? Expliquer la différence entre « avoir une limite » et « être continue ».

Exo 13 synthèse : lire un tableau de limites

On donne, pour une fonction f , les renseignements suivants en trois points.

point x_0	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f$	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f$	$f(x_0)$
-1	2	2	2
0	1	3	1
1	4	4	7

a)

En quel(s) point(s) f possède-t-elle une limite ? Donner sa valeur.

b)

En quel(s) point(s) f est-elle continue ?

c)

Au point $x_0 = 0$, f est-elle continue à gauche ? à droite ? Justifier.



DEUXIÈME PARTIE

Corrigés

Chaque exercice repris pas à pas, niveau par niveau.
Compare ta démarche, pas seulement ton résultat.





Une seconde – avant d'ouvrir le corrigé...



Si ce carnet t'aide, rends-nous la pareille : parle de simulationconcours.be à quelqu'un qui prépare le concours. C'est comme ça qu'on peut continuer.

Ce qu'on a préparé pour toi

- ✓ Ce carnet en interactif, avec correction en un clic
- ✓ Les cours complets, chapitre par chapitre – gratuits
- ✓ 3100 QCM type concours, corrigés et expliqués
- ✓ Des fiches de révision à imprimer

Tous les jeudis : simulation du concours en ligne

En conditions réelles – chrono, QCM type concours et score immédiat.



Rejoins-nous sur simulationconcours.be

scanne le QR ou tape l'adresse – puis reviens vérifier tes réponses

Les corrigés

FACILE 15 exercices

Exo 1 calcul direct par remplacement

On remplace directement x par la cible (les fonctions sont définies au point).

a)

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - x + 4) = 3 \cdot 4 - 2 + 4 = 12 - 2 + 4 = \boxed{14}.$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + 5}{x^2 + 3} = \frac{2(-1) + 5}{(-1)^2 + 3} = \frac{3}{4} = \boxed{\frac{3}{4}} \text{ (le dénominateur vaut } 4 \neq 0 \text{).}$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x} + x) = \sqrt{4} + 4 = 2 + 4 = \boxed{6}.$$

d)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + 2x - 7) = 0 + 0 - 7 = \boxed{-7}.$$

Exo 2 lire et écrire une notation

a)

« Lorsque x devient de plus en plus grand (tend vers $+\infty$), $f(x)$ se rapproche de 3. » (Géométriquement : la droite $y = 3$ est asymptote horizontale.)

b)

« Lorsque x se rapproche de 2 *par la gauche* (par valeurs inférieures à 2), $f(x)$ devient de plus en plus grand en valeur négative, c.-à-d. tend vers $-\infty$. »

c)

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} g(x) = 0.$$

Exo 3 limites à gauche et à droite d'une fonction par morceaux

a)

À gauche de 2 on a $x < 2$, donc $f(x) = x + 1$: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 + 1 = 3$.

b)

À droite (et en 2) on a $x \geq 2$, donc $f(x) = 3x - 2$: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3 \cdot 2 - 2 = 4$.

c)

Les deux limites latérales sont *différentes* ($3 \neq 4$): **f n'a pas de limite (globale) en 2**. (La courbe présente un saut de hauteur 1.)

Exo 4 lecture graphique

La courbe se rapproche de la droite $y = 2$ aux deux bouts, et passe par l'origine.

a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2.$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2.$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{ (la courbe passe par le point } (0, 0), \text{ sans trou ni saut).}$$

Exo 5 vérifier une continuité

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 3}.$$

a)

En $x_0 = 1$, le dénominateur vaut $1 + 3 = 4 \neq 0$: donc $1 \in D_g$ et g est définie en 1.

b)

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \frac{1^2 - 1}{1 + 3} = \frac{0}{4} = 0, \text{ et } g(1) = \frac{1-1}{1+3} = 0.$$

c)

La limite (0) est égale à $g(1)$ (0): **g est continue en 1**. (C'est le cas général d'une fonction rationnelle en un point où le dénominateur ne s'annule pas.)

Exo 6 calcul direct : polynômes et quotients définis

a)

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2x + 5) = 9 - 6 + 5 = \boxed{8}.$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x + 7}{x^2 + 1} = \frac{4(-2) + 7}{(-2)^2 + 1} = \frac{-1}{5} = \boxed{-\frac{1}{5}} \text{ (dénominateur } 5 \neq 0).$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 1} (5 - 3x + x^2) = 5 - 3 + 1 = \boxed{3}.$$

d)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7 - 2x}{x + 4} = \frac{7 - 0}{0 + 4} = \boxed{\frac{7}{4}}.$$

Exo 7 calcul direct avec une racine carrée

a)

$$\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{\sqrt{16}}{2} = \frac{4}{2} = \boxed{2}.$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 25} (\sqrt{x} - x) = \sqrt{25} - 25 = 5 - 25 = \boxed{-20}.$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{3x + 1} = \sqrt{3 \cdot 1 + 1} = \sqrt{4} = \boxed{2}.$$

d)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 + 5} = \sqrt{4 + 5} = \sqrt{9} = \boxed{3}.$$

Exo 8 traduire une notation en une phrase

a)

« Lorsque x devient de plus en plus grand *en valeur négative* (tend vers $-\infty$), $f(x)$ se rapproche de 0. » (La droite $y = 0$ est asymptote horizontale.)

b)

« Lorsque x se rapproche de 3 *par la droite* (par valeurs supérieures à 3), $f(x)$ tend vers 5. »

c)

« Lorsque x devient de plus en plus grand (tend vers $+\infty$), $f(x)$ décroît sans borne, c.-à-d. tend vers $-\infty$. »

Exo 9 écrire une limite avec le symbole $\lim$

a)

$$\lim_{x \rightarrow 4} h(x) = 7.$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2.$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = +\infty.$$

Exo 10 limites latérales d'une fonction par morceaux

a)

À gauche de 3 on a $x < 3$, donc $f(x) = 2x - 1$: $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2 \cdot 3 - 1 = 5$.

b)

À droite (et en 3) on a $x \geq 3$, donc $f(x) = x + 2$: $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3 + 2 = 5$.

c)

Les deux limites latérales sont égales à 5 : f possède une limite en 3, et $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$.

Exo 11 continuité d'un polynôme en un point

a)

$$f(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = 4 - 6 + 1 = -1.$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 1) = 4 - 6 + 1 = -1 \text{ (un polynôme se calcule par remplacement direct).}$$

c)

La limite (-1) est égale à $f(2)$ (-1) : f est continue en 2. (Tout polynôme est continu en chaque point de $\mathbb{R}$.)

Exo 12 vérifier une continuité : fonction rationnelle

a)

En $x_0 = 3$, le dénominateur vaut $3 - 1 = 2 \neq 0$: donc $3 \in D_g$ et g est définie en 3.

b)

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \frac{3+4}{3-1} = \frac{7}{2}, \text{ et } g(3) = \frac{3+4}{3-1} = \frac{7}{2}.$$

c)

La limite $(\frac{7}{2})$ est égale à $g(3)$ $(\frac{7}{2})$: g est continue en 3.

Exo 13 lecture graphique : asymptote horizontale

La courbe colle à la droite $y = 1$ aux deux bouts et culmine en $(0; 2)$.

a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1.$$

c)

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$ (la courbe passe par le point $(0; 2)$, sans trou ni saut).

Exo 14 peut-on remplacer directement ?

a)

En 2, le dénominateur vaut $2 - 5 = -3 \neq 0$: **oui**, $2 \in D_f$, le remplacement est légitime.

b)

En 5, le dénominateur vaut $5 - 5 = 0$: **non**, $5 \notin D_f$ (division par 0).

c)

En -1, on a $x + 3 = 2 \geq 0$: **oui**, la racine est définie, remplacement légitime.

d)

En -4, on a $x + 3 = -1 < 0$: **non**, racine d'un nombre négatif, $-4 \notin D_f$.

Exo 15 lecture graphique : un saut

a)

La branche de gauche arrive au niveau 1 (rond ouvert) : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$.

b)

La branche de droite part du niveau 3, avec le rond plein : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$ et $f(1) = 3$.

c)

Les deux limites latérales diffèrent ($1 \neq 3$) : **f n'a pas de limite** en 1 (saut de hauteur 2).

MOYEN 15 exercices

Exo 1 calcul direct avec fonctions usuelles

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + 3 \cos x) = e^0 + 3 \cos 0 = 1 + 3 = \boxed{4}.$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + 2}{x + 1} = \frac{\ln 1 + 2}{1 + 1} = \frac{0 + 2}{2} = \boxed{1}.$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (2 \sin x - x) = 2 \sin \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 2 - \frac{\pi}{2} = \boxed{2 - \frac{\pi}{2}} \approx 0,43.$$

d)

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 5} = \frac{\sqrt{9} - 1}{9 - 5} = \frac{3 - 1}{4} = \frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}} \text{ (le dénominateur vaut } 4 \neq 0 \text{).}$$

Exo 2 raccord de deux morceaux

a)

À gauche $x \leq 1$: $f(x) = x^2 + 1$, donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1^2 + 1 = 2$.

À droite $x > 1$: $f(x) = 4x - 2$, donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4 \cdot 1 - 2 = 2$.

b)

Les deux limites latérales sont *égales* à 2 : f possède la limite $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

c)

$f(1)$ se calcule avec le morceau $x \leq 1$: $f(1) = 1^2 + 1 = 2$. Comme $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 = f(1)$, **f est continue en 1.**

Exo 3 ajuster un paramètre pour la continuité

a)

À gauche $x < 3$: $f(x) = 2x + k$, donc $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 6 + k$.

À droite $x \geq 3$: $f(x) = x^2$, donc $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 9$; de plus $f(3) = 9$.

b)

f est continue en 3 ssi limite à gauche = limite à droite = $f(3)$, soit $6 + k = 9$, donc $\boxed{k = 3}$.

Exo 4 lecture graphique fine

a)

La branche de gauche arrive au niveau 2 : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$. La branche de droite part du niveau 0,8 :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0,8.$$

b)

Le rond plein est placé en $(1 ; 0,8)$, donc $f(1) = 0,8$.

c)

Les deux limites latérales diffèrent ($2 \neq 0,8$) : f n'a pas de limite en 1, donc **n'est pas continue** en 1. En revanche, à droite $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0,8 = f(1)$: **f est continue à droite** en 1 (mais pas à gauche).

Exo 5 vrai / faux justifié

a)

Faux. L'égalité des limites latérales garantit seulement que la *limite existe* ; il faut *en plus* que cette limite vaille $f(x_0)$ (et que $x_0 \in D_f$) pour la continuité.

b)

Vrai. Par exemple $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ n'est pas définie en 1, mais tend vers 2 en 1. La limite décrit une tendance, pas une valeur au point.

c)

Vrai. C'est exactement la définition de la continuité en x_0 : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Exo 6 calcul direct : exponentielle, logarithme, trigonométrie

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{3x} + 2 \cos x) = e^0 + 2 \cos 0 = 1 + 2 = \boxed{3}.$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + x}{x^2 + 1} = \frac{\ln 1 + 1}{1^2 + 1} = \frac{0 + 1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (2 \sin x + 1) = 2 \sin \frac{\pi}{6} + 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = \boxed{2}.$$

d)

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e} = \boxed{\frac{1}{e}} \text{ (le dénominateur vaut } e \neq 0 \text{).}$$

Exo 7 raccord qui ne se fait pas

a)

À gauche $x < 2$: $f(x) = x + 3$, donc $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5$.

À droite (et en 2) $x \geq 2$: $f(x) = x^2$, donc $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$ et $f(2) = 4$.

b)

Les deux limites latérales diffèrent ($5 \neq 4$) : **f n'a pas de limite** en 2.

c)

N'ayant pas de limite en 2, **f n'est pas continue** en 2. En revanche, à droite $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 = f(2)$: **f est continue à droite** en 2 (mais pas à gauche, car $5 \neq 4$).

Exo 8 ajuster un coefficient pour la continuité

a)

À gauche (et en 2) $x \leq 2$: $f(x) = ax - 1$, donc $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2a - 1 = f(2)$.

À droite $x > 2$: $f(x) = x^2 + x$, donc $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 + 2 = 6$.

b)

f est continue en 2 ssi $2a - 1 = 6$, soit $2a = 7$, donc $a = \frac{7}{2} = 3,5$.

Exo 9 lecture graphique : un trou

La courbe est la droite $y = x + 1$ privée du point $(1 ; 2)$ (rond ouvert).

a)

Des deux côtés la courbe pointe vers le niveau 2 : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$.

b)

Les deux limites latérales sont égales : f **possède une limite** en 1, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

c)

f **n'est pas continue** en 1 car $1 \notin D_f$ (rond ouvert : f n'y est pas définie). La limite existe pourtant : on pourrait « boucher le trou » en posant $f(1) = 2$ (prolongement par continuité).

Exo 10 vrai / faux justifié

a)

Faux. f peut être définie en x_0 tout en ayant des limites latérales différentes (un saut) : la limite n'existe alors pas. Ainsi la fonction « $x + 3/x^2$ » de l'exercice précédent est définie en 2 mais n'a pas de limite en 2.

b)

Vrai. C'est exactement la définition de la continuité en x_0 : les deux limites latérales existent, sont égales, et valent $f(x_0)$.

c)

Vrai. Les polynômes sont continus sur $\mathbb{R}$; on calcule d'ailleurs leurs limites par simple remplacement.

Exo 11 calcul direct : quotients définis

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\cos x} = \frac{e^0}{\cos 0} = \frac{1}{1} = \boxed{1}.$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \boxed{1}.$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x}{e^x} = \frac{1+0}{e^0} = \frac{1}{1} = \boxed{1}.$$

d)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{1 + \sin \frac{\pi}{2}} = \frac{0}{1+1} = \boxed{0} \text{ (dénominateur } 2 \neq 0 \text{)}.$$

Exo 12 limite et valeur : comparer

a)

Autour de 1 (pour $x \neq 1$) on a $f(x) = 2x + 1$, donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$.

b)

La valeur imposée est $f(1) = 5$.

c)

La limite (3) diffère de $f(1)$ (5) : **f n'est pas continue en 1**, bien que la *limite existe*. (La courbe est la droite $y = 2x + 1$ avec le point en 1 « déplacé » vers 5.)

Exo 13 notations et asymptotes

a)

« Quand x tend vers 2 par la droite, $f(x)$ devient infiniment grand. » L'asymptote est **verticale**, d'équation $x = 2$.

b)

« Quand x tend vers $+\infty$, $f(x)$ se rapproche de 3. » L'asymptote est **horizontale**, d'équation $y = 3$.

c)

Oui : une fonction peut avoir une asymptote horizontale en $+\infty$ et une *autre*, différente, en $-\infty$ (par exemple $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 3$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -1$). Il y en a au plus deux, une par côté.

Exo 14 fonction à trois morceaux

a)

À gauche $x < 0$: $f(x) = x + 2$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$.

À droite $x > 0$: $f(x) = x^2 + 3$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3$.

b)

Les deux limites latérales diffèrent ($2 \neq 3$): f **n'a pas de limite** en 0.

c)

f **n'est pas continue** en 0. Comme $f(0) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2 = f(0)$, f **est continue à gauche** en 0 (mais pas à droite, car $3 \neq 2$).

Exo 15 lecture graphique : une branche infinie

La courbe est celle de $\frac{1}{x-1}$: deux branches séparées par la droite $x = 1$.

a)

À gauche de 1, la branche plonge : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$. À droite, elle monte : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$.

b)

Les limites latérales étant infinies, la droite $x = 1$ est une **asymptote verticale**.

c)

Aux deux bouts la courbe se rapproche de l'axe des abscisses : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. La droite $y = 0$ est une **asymptote horizontale**.

DIFFICILE 13 exercices

Exo 1 une fonction à deux paramètres

a)

À gauche ($x < 2$): $f(x) = ax + 1$, donc $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2a + 1$.

À droite ($x > 2$): $f(x) = x^2 + b$, donc $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 + b$.

b)

f possède une limite en 2 ssi les deux limites latérales sont égales :

$$2a + 1 = 4 + b \iff \boxed{b = 2a - 3}.$$

c)

Pour la *continuité* en 2, il faut de plus que cette limite commune soit égale à $f(2) = 3$:

$$2a + 1 = 3 \text{ (et) } 4 + b = 3.$$

d)

De $2a + 1 = 3$ on tire $a = 1$; de $4 + b = 3$ on tire $b = -1$. (Ces valeurs vérifient bien $b = 2a - 3 = -1$.)

$$(a, b) = (1, -1)$$

est l'unique paire rendant f continue en 2. Exemple : $f(x) = x + 1$ pour $x < 2$, $f(2) = 3$, $f(x) = x^2 - 1$ pour $x > 2$; on a alors $\lim_{x \rightarrow 2^\pm} f = 3 = f(2)$.

Exo 2 lecture graphique complète

a)

Aux deux bouts la courbe colle à la droite $y = 1$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$. La droite $y = 1$ est une **asymptote horizontale**.

b)

À gauche de 2, la branche plonge : $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$. La droite $x = 2$ est donc une **asymptote verticale**.

c)

Le rond ouvert est en $(2 ; 3)$, donc $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$; le rond plein est en $(2 ; 0)$, donc $f(2) = 0$.

d)

Les limites latérales en 2 diffèrent ($-\infty$ à gauche, 3 à droite) : f **n'a pas de limite** en 2 et n'est donc pas continue. De plus, à droite $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3 \neq f(2) = 0$: f **n'est pas continue à droite** non plus. (La valeur $f(2) = 0$ est un point isolé.)

Exo 3 mise en situation : un tarif par paliers

a)

À gauche ($t \leq 20$) : $M(t) = 30$, donc $\lim_{t \rightarrow 20^-} M(t) = 30$.

À droite ($t > 20$) : $M(t) = 30 + 2(t - 20)$, donc $\lim_{t \rightarrow 20^+} M(t) = 30 + 2(20 - 20) = 30$.

b)

Les deux limites valent 30 et $M(20) = 30$: M **est continue en 20**. Concrètement, le tarif *ne saute pas* : à 20 minutes on paie 30 €, et juste après le montant augmente continûment (pas de bond brutal).

c)

Avec $35 + 2(t - 20)$ pour $t > 20$: $\lim_{t \rightarrow 20^+} M(t) = 35$ tandis que $\lim_{t \rightarrow 20^-} M(t) = 30$. Les limites latérales diffèrent : M serait **discontinue** en 20, avec un **saut de $35 - 30 = 5$ €** (le prix bondirait de 5 € dès qu'on dépasse 20 minutes).

Exo 4 deux paramètres et une contrainte

a)

La branche de gauche est $ax + b$; passer par $(0; 3)$ signifie $f(0) = b = 3$, donc $b = 3$.

b)

À gauche (et en 2): $f(x) = ax + b$, donc $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2a + b = f(2)$.

À droite: $f(x) = x^2 + 1$, donc $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 + 1 = 5$.

c)

Continuité en 2: $2a + b = 5$.

d)

Avec $b = 3$: $2a + 3 = 5$, d'où $a = 1$. Donc $(a, b) = (1, 3)$. Vérification: à gauche $f(x) = x + 3$, $f(2) = 5$; à droite $\lim_{x \rightarrow 2^+} f = 5$: la limite commune vaut $5 = f(2)$, f est bien continue.

Exo 5 continuité en deux points de raccord

a)

À gauche $x < 0$: $f(x) = x + 1$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$. À droite $0 \leq x < 2$: $f(x) = x^2 + 1$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ et $f(0) = 1$. Les trois valent 1: **f est continue en 0.**

b)

En 2: à gauche $f(x) = x^2 + 1$ donne $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5$; à droite (et en 2) $f(x) = ax + b$ donne $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2a + b = f(2)$. Continuité en 2: $2a + b = 5$.

c)

$f(3) = 3a + b = 6$. Avec $2a + b = 5$, on soustrait: $(3a + b) - (2a + b) = 6 - 5$, soit $a = 1$; puis $b = 5 - 2 = 3$. Donc $(a, b) = (1, 3)$.

Exo 6 mise en situation : impôt par tranches

a)

À gauche ($r \leq 10\,000$): $I = 0$, donc $\lim_{r \rightarrow 10\,000^-} I(r) = 0$. À droite: $I(r) = 0,1(r - 10\,000) \rightarrow 0,1 \cdot 0 = 0$. Comme $I(10\,000) = 0$, **le barème est continu en 10 000.**

b)

À gauche: $0,1(25\,000 - 10\,000) = 0,1 \cdot 15\,000 = 1500$, donc $\lim_{r \rightarrow 25\,000^-} I(r) = 1500$. À droite: $1500 + 0,2(25\,000 - 25\,000) = 1500$. Comme $I(25\,000) = 1500$, **le barème est continu en 25 000.**

c)

Aux deux seuils, les limites latérales coïncident : **le montant ne fait aucun saut**. Franchir un seuil ne provoque pas de bond brutal de l'impôt ; seul le *taux* (la pente) change. C'est le principe d'un barème progressif continu.

Exo 7 continuité selon la valeur d'un paramètre

a)

À gauche (et en 1) : $f(x) = x^2$, donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$ et $f(1) = 1^2 = 1$.

b)

À droite : $f(x) = mx + 2$, donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = m + 2$.

c)

Continuité en 1 : $m + 2 = 1$, donc $m = -1$.

d)

Oui, pour tout m . La limite à gauche vaut toujours $1 = f(1)$ (le morceau gauche inclut $x = 1$), donc f est *toujours* continue à gauche en 1. Seule la continuité à droite dépend de m : elle n'a lieu que pour $m = -1$.

Exo 8 lecture graphique complète

a)

À droite, la courbe colle à la droite $y = 1$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. C'est une **asymptote horizontale** d'équation $y = 1$.

b)

Près de 0 par la droite, la courbe monte sans borne : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$. La droite $x = 0$ est donc une **asymptote verticale**.

c)

Le rond ouvert est en $(0 ; 3)$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3$; le rond plein est en $(0 ; 1)$, donc $f(0) = 1$.

d)

Les limites latérales en 0 diffèrent (3 à gauche, $+\infty$ à droite) : **f n'a pas de limite** en 0, donc n'est pas continue. À droite, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f = +\infty \neq f(0) = 1$: **f n'est pas non plus continue à droite**. (La valeur $f(0) = 1$ est un point isolé.)

Exo 9 limite, puis continuité : deux exigences distinctes

a)

À gauche : $f(x) = 2x + c$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = c$. À droite : $f(x) = x^2 + 4$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 4$.

b)

f possède une limite en 0 ssi les limites latérales sont égales : $c = 4$ (la limite vaut alors 4).

c)

Avec $c = 4$, la limite en 0 vaut 4, mais la valeur imposée est $f(0) = 1 \neq 4$: **f n'est pas continue en 0**, bien que la limite existe.

d)

Il faudrait poser $f(0) = 4$ (la valeur de la limite) pour rendre f continue en 0.

Exo 10 synthèse : vrai / faux justifié

a)

Vrai. La limite d'une somme est la somme des limites : $\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g) = \lim_{x \rightarrow x_0} f + \lim_{x \rightarrow x_0} g = f(x_0) + g(x_0) = (f + g)(x_0)$.

b)

Faux. Une limite peut exister là où f n'est pas définie. Contre-exemple : $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ n'est pas définie en 1, mais $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

c)

Vrai. Continue à gauche signifie $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f = f(x_0)$ et continue à droite $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f = f(x_0)$: les deux limites latérales valent $f(x_0)$, donc sont égales entre elles et à $f(x_0)$ — c'est la continuité.

d)

Faux. L'égalité des limites latérales garantit seulement que la *limite existe* ; encore faut-il qu'elle vaille $f(x_0)$. Contre-exemple : $f(x) = 2x + 1$ pour $x \neq 1$ et $f(1) = 5$: la limite vaut 3, mais $f(1) = 5$, donc f est discontinue en 1.

Exo 11 continuité d'une fonction avec valeur absolue

a)

Selon le signe de $x - 2$: $|x - 2| = 2 - x$ si $x < 2$ et $x - 2$ si $x \geq 2$. Donc

$$f(x) = \begin{cases} (2 - x) + 1 = 3 - x & \text{si } x < 2, \\ (x - 2) + 1 = x - 1 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

b)

À gauche : $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3 - 2 = 1$. À droite : $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 - 1 = 1$. Et $f(2) = |0| + 1 = 1$.

c)

Les deux limites latérales valent $1 = f(2)$: **f est continue en 2**. (La courbe forme un « coin » anguleux en 2, mais un point anguleux n'empêche pas la continuité.)

Exo 12 quelle valeur donner au point ?

a)

Autour de 2 (pour $x \neq 2$) on a $g(x) = 3x - 1$, donc $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3 \cdot 2 - 1 = 5$.

b)

Pour la continuité en 2, il faut $g(2) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 5$.

c)

Avec $g(2) = 10$: la limite ne dépend que du comportement *autour de* 2, pas de la valeur au point ; elle vaut donc toujours 5 : **la limite existe** ($= 5$). Mais $g(2) = 10 \neq 5$, donc **g n'est pas continue en 2**. Différence : la limite est une *tendance* autour du point ; la continuité exige en plus que cette tendance *coïncide* avec la valeur au point.

Exo 13 synthèse : lire un tableau de limites

a)

Une limite existe là où les deux limites latérales sont égales : en -1 (limite 2) et en 1 (limite 4). En 0, elles diffèrent ($1 \neq 3$) : *pas* de limite.

b)

f est continue là où la limite existe *et* vaut $f(x_0)$: en -1 , $2 = f(-1) = 2$ **continue** ; en 1, la limite 4 $\neq f(1) = 7$ **non continue** ; en 0, pas de limite **non continue**. Donc f est continue **seulement en -1** .

c)

En 0 : à gauche $\lim_{x \rightarrow 0^-} f = 1 = f(0) \Rightarrow$ **continue à gauche** ; à droite $\lim_{x \rightarrow 0^+} f = 3 \neq f(0) = 1 \Rightarrow$ **pas continue à droite**.



Tous les exos cochés ? Passe au niveau réel.



Ce carnet est un extrait de notre bibliothèque d'entraînement — la suite se joue en ligne.

Sur simulationconcours.be

- ✓ Le même carnet en interactif, avec correction en un clic
- ✓ Les autres mécaniques de la fiche, niveau par niveau
- ✓ 3100 QCM type concours, corrigés et expliqués
- ✓ Les cours complets — gratuits — et les fiches de révision

Tous les jeudis : simulation du concours en ligne

En conditions réelles — chrono, QCM type concours et score immédiat.



Rejoins-nous sur simulationconcours.be

scanne le QR ou tape l'adresse — les cours complets sont gratuits