



simulationconcours.be

Mathématiques

Carnet d'entraînement

Règle $a/0\pm$ et fonctions rationnelles en un point interdit

Les limites · Mécanique 2 — des exercices calibrés concours, du plus simple au plus retors.

43 exercices

3 niveaux

corrigés détaillés

Comment bosser ce carnet

- ✓ Lis d'abord le tutoriel : la mécanique y est expliquée pas à pas
- ✓ Fais chaque niveau en entier **avant** d'ouvrir les corrigés
- ✓ Note à côté de chaque exo : réussi, hésité ou raté — et rejoue les ratés 48 h plus tard



simulationconcours.be

scanne & continue en ligne

Sommaire

- 1 Le tutoriel — la mécanique expliquée
- 2 Les exercices Facile x15 · Moyen x15 · Difficile x13
- 3 Les corrigés détaillés exercice par exercice

Le tutoriel

Ce document est un **carnet d'exercices** : on t'explique d'abord la mécanique, puis tu la travailles sur 43 exercices classés en trois niveaux. Les corrigés détaillés t'attendent en deuxième partie, après la page « Corrigés » — pas avant de l'avoir mérité.

MÉMO Thème 2 — La règle $\frac{a}{0^\pm}$ et l'asymptote verticale

Mécanique travaillée : calculer la limite d'une fonction rationnelle en un point x_0 qui *annule le dénominateur* (donc $x_0 \notin D_f$). On y arrive avec un **tableau de signes** du dénominateur et la **règle des signes** $\frac{a}{0^\pm} \rightarrow \pm\infty$.

1. La règle $\frac{a}{0^\pm}$

Diviser un nombre $a \neq 0$ par une quantité qui *tend vers 0* donne l'infini. Le *signe* de cet infini se lit par la règle des signes, en traitant « 0^+ » comme un + et « 0^- » comme un —.

L'ESSENTIEL les quatre cas à connaître par cœur

$$\frac{a}{0^+} \rightarrow +\infty \ (a > 0), \quad \frac{a}{0^+} \rightarrow -\infty \ (a < 0),$$

$$\frac{a}{0^-} \rightarrow -\infty \ (a > 0), \quad \frac{a}{0^-} \rightarrow +\infty \ (a < 0).$$

ATTENTION ce n'est PAS une forme indéterminée

$\frac{a}{0^\pm}$ avec $a \neq 0$ se conclut *directement* par $\pm\infty$. On ne confond pas avec $\frac{0}{0}$, qui, elle, est indéterminée (thèmes 3 et 5). Ici le numérateur *ne tend pas vers 0*.

2. Méthode : limite rationnelle en un point interdit

☞ **MÉTHODE** limite de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en x_0 avec $Q(x_0) = 0$ et $P(x_0) \neq 0$

- 1 Calculer $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = a$ (un nombre non nul).
- 2 Dresser le **tableau de signes** du dénominateur Q autour de x_0 : est-il 0^+ ou 0^- à droite ? à gauche ?
- 3 Appliquer la règle $\frac{a}{0^\pm}$ de chaque côté.
- 4 Conclure : si les deux côtés donnent le *même* infini, la limite existe (infinie) ; s'ils diffèrent, pas de limite globale. Dans tous les cas, $x = x_0$ est une **asymptote verticale**.

🔗 **EXEMPLE** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x + 5}{1 - x}$

Domaine $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Numérateur en 1 : $-2(1) + 5 = 3 (> 0)$. Dénominateur $1 - x$: positif si $x < 1$, négatif si $x > 1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$			
$1-x$		+	+	+	0	-	-	-

Donc $x \rightarrow 1^- \Rightarrow 1 - x \rightarrow 0^+$ et $x \rightarrow 1^+ \Rightarrow 1 - x \rightarrow 0^-$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2x + 5}{1 - x} = \frac{3}{0^+} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2x + 5}{1 - x} = \frac{3}{0^-} = -\infty.$$

Les deux côtés diffèrent : pas de limite globale en 1 ; la droite $x = 1$ est asymptote verticale.

🔗 **EXEMPLE** *dénominateur au carré : même signe des deux côtés*

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x - 2)^2}$. Le numérateur vaut $1 > 0$; le dénominateur $(x - 2)^2$ est *toujours* > 0 (carré), donc tend vers 0^+ des deux côtés :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{(x - 2)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{(x - 2)^2}.$$

Ici la limite existe : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x - 2)^2} = +\infty$.

 ASTUCE *le tableau de signes en 10 secondes*

Pour un facteur affine $(\alpha x + \beta)$, le signe change en $x = -\frac{\beta}{\alpha}$; il est du signe de α « à droite » de cette racine. Pour un carré $(\dots)^2$ ou toute puissance paire, le signe est *constant positif* (sauf au zéro) : les deux côtés se comportent pareil.

Les exercices

FACILE 15 exercices

Exo 1 appliquer la règle des signes

Donner le résultat ($+\infty$ ou $-\infty$) de chaque forme.

1 $\frac{5}{0^+}$ b) $\frac{-3}{0^+}$ c) $\frac{2}{0^-}$ d) $\frac{-7}{0^-}$

Exo 2 signe du dénominateur

Pour chaque expression, dire si le dénominateur tend vers 0^+ ou 0^- du côté indiqué.

1 $x - 4$ quand $x \rightarrow 4^+$ b) $x - 4$ quand $x \rightarrow 4^-$

2 $2 - x$ quand $x \rightarrow 2^+$ d) $(x - 1)^2$ quand $x \rightarrow 1^-$

Exo 3 limites latérales élémentaires

Calculer les deux limites latérales.

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{x} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{x}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{x - 4} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{x - 4}$$

Exo 4 une fonction rationnelle simple

Soit $f(x) = \frac{7}{x+3}$, de domaine $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

a)

Le numérateur tend-il vers 0 en -3 ? Quel est son signe?

b)

Calculer $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$.

Exo 5 repérer une asymptote verticale

Pour chaque fonction, donner la valeur x_0 qui annule le dénominateur (sans l'annuler au numérateur) : c'est l'abscisse d'une asymptote verticale.

1 $\frac{x+1}{x-5}$ b) $\frac{4}{2x+6}$ c) $\frac{5}{x^2}$

Exo 6 règle des signes : numérateur positif ou négatif

Donner le résultat ($+\infty$ ou $-\infty$) de chaque forme.

a)

$$\frac{-4}{0^+}$$

b)

$$\frac{9}{0^-}$$

c)

$$\frac{-6}{0^-}$$

d)

$$\frac{8}{0^+}$$

Exo 7 signe d'un dénominateur affine

Le dénominateur tend-il vers 0^+ ou 0^- du côté indiqué ?

a)

$$2x - 6 \text{ quand } x \rightarrow 3^+$$

b)

$$2x - 6 \text{ quand } x \rightarrow 3^-$$

c)

$$5 - x \text{ quand } x \rightarrow 5^-$$

d)

$$-3x + 9 \text{ quand } x \rightarrow 3^+$$

Exo 8 limites latérales : numérateur négatif, coefficient au dénominateur

Calculer les deux limites latérales.

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2}{x} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2}{x}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow (1/2)^+} \frac{1}{2x - 1} \text{ et } \lim_{x \rightarrow (1/2)^-} \frac{1}{2x - 1}$$

Exo 9 fonction rationnelle à numérateur constant négatif

Soit $f(x) = \frac{-5}{x-2}$, de domaine $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

a)

Le numérateur tend-il vers 0 en 2 ? Quel est son signe ?

b)

Calculer $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$.

Exo 10 numérateur variable, non nul au point

Soit $f(x) = \frac{x+4}{x-1}$.

a)

Que vaut le numérateur en 1 ? S'annule-t-il ?

b)

Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

Exo 11 dénominateur au carré

Soit $f(x) = \frac{3}{(x-2)^2}$.

a)

Quel est le signe de $(x - 2)^2$ pour $x \neq 2$? Vers quoi tend-il en 2 (des deux côtés) ?

b)

En déduire $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$; f a-t-elle une limite globale en 2 ?

Exo 12 repérer l'asymptote verticale

Donner la valeur x_0 qui annule le dénominateur sans annuler le numérateur (abscisse d'une asymptote verticale).

a)

$$\frac{x+2}{x-7}$$

b)

$$\frac{3}{5-2x}$$

c)

$$\frac{-4}{(x+2)^2}$$

Exo 13 lire un tableau de signes

Le tableau ci-dessous donne le signe du dénominateur $(x - 1)(x - 4)$. On étudie $f(x) = \frac{3}{(x-1)(x-4)}$ (numérateur $3 > 0$) au voisinage de $x = 1$.

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$(x-1)(x-4)$		+	0	-	0	+	

a)

Donner $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

b)

Donner $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

c)

Quelle asymptote verticale reconnaît-on en $x = 1$?

Exo 14 vrai ou faux

Vrai ou faux ? Justifier d'un mot.

a)

« $\frac{a}{0^+} = +\infty$ pour tout réel $a \neq 0$. »

b)

« $\frac{a}{0^-}$ et $\frac{a}{0^+}$ ont toujours des signes opposés (pour $a \neq 0$). »

c)

« Une forme $\frac{0}{0}$ se conclut par $\pm\infty$. »

d)

« Si le dénominateur est un carré, les deux limites latérales sont égales. »

Exo 15 reconnaître la forme obtenue

Après remplacement, dire si la forme est du type $\frac{a}{0^\pm}$ (réponse $\pm\infty$) ou un simple nombre, puis donner sa valeur.

a)

$$\frac{5}{0^+}$$

b)

$$\frac{2}{7}$$

c)

$$\frac{-3}{0^-}$$

d)

$$\frac{0}{4}$$

MOYEN 15 exercices

Exo 1 étude complète des deux côtés

Soit $f(x) = \frac{3x-1}{x-2}$.

a)

Donner D_f et la limite du numérateur en 2 (son signe).

b)

Étudier le signe de $x - 2$ à gauche et à droite de 2.

c)

En déduire $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$.

d)

f a-t-elle une limite en 2 ? Quelle asymptote en déduit-on ?

Exo 2 dénominateur qui change de signe

Soit $g(x) = \frac{4}{3-x}$.

a)

Dresser le tableau de signes de $3 - x$ autour de 3.

b)

Calculer $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x)$.

Exo 3 dénominateur au carré

Soit $h(x) = \frac{-2}{(x+1)^2}$.

a)

Quel est le signe de $(x + 1)^2$ pour $x \neq -1$? Vers quoi tend-il en -1 ?

b)

En déduire $\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x)$.

c)

h a-t-elle une limite (globale) en -1 ? Si oui, laquelle ?

Exo 4 dénominateur factorisé

Soit $k(x) = \frac{5}{(x-1)(x-4)}$. On étudie la limite en $x_0 = 4$.

a)

En 4, quel est le signe du facteur $(x - 1)$? (il ne s'annule pas en 4)

b)

En déduire le signe du produit $(x - 1)(x - 4)$ à droite puis à gauche de 4.

c)

Calculer $\lim_{x \rightarrow 4^-} k(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 4^+} k(x)$.

Exo 5 reconnaître le bon outil

Pour chaque limite, dire d'abord si le remplacement direct donne un nombre, une forme $\frac{a}{0^\pm}$ (avec $a \neq 0$), ou une forme $\frac{0}{0}$ (indéterminée). *Ne calculer que les deux premiers types.*

1 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2}{x-1}$ b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{x-1}$

2 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

Exo 6 étude complète : numérateur négatif

Soit $f(x) = \frac{2x+3}{x+4}$.

a)

Donner D_f et la limite du numérateur en -4 (avec son signe).

b)

Étudier le signe de $x + 4$ à gauche et à droite de -4 .

c)

En déduire $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x)$.

d)

f a-t-elle une limite en -4 ? Quelle asymptote en déduit-on ?

Exo 7 coefficient et dénominateur renversé

Soit $g(x) = \frac{-3}{5-2x}$.

a)

Étudier le signe de $5 - 2x$ autour de $\frac{5}{2}$.

b)

Calculer $\lim_{x \rightarrow (5/2)^-} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow (5/2)^+} g(x)$.

Exo 8 dénominateur factorisé : étude à la racine de gauche

Soit $k(x) = \frac{7}{(x+2)(x-3)}$. On étudie la limite en $x_0 = -2$.

a)

Quel est le signe du facteur $(x - 3)$ au voisinage de -2 ? (il ne s'annule pas en -2)

b)

En déduire le signe du produit $(x + 2)(x - 3)$ à gauche puis à droite de -2 .

c)

Calculer $\lim_{x \rightarrow -2^-} k(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -2^+} k(x)$.

Exo 9 dénominateur au carré, numérateur variable

Soit $h(x) = \frac{x-5}{(x-2)^2}$.

a)

Que vaut le numérateur en 2 (avec son signe) ? S'annule-t-il ?

b)

Vers quoi tend $(x - 2)^2$ en 2 (des deux côtés) ?

c)

En déduire $\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x)$; h a-t-elle une limite globale en 2 ?

Exo 10 factoriser un trinôme puis étudier

Soit $\varphi(x) = \frac{-4}{x^2 - 2x - 3}$.

a)

Factoriser $x^2 - 2x - 3$ et donner D_φ .

b)

Dresser le tableau de signes du dénominateur sur $\mathbb{R}$.

c)

Étudier les limites latérales en $x = -1$.

d)

Étudier les limites latérales en $x = 3$.

e)

Combien d'asymptotes verticales ? Donner leurs équations.

zéro du numérateur ou pôle ?

Exo 11

Soit $\psi(x) = \frac{x-1}{x-4}$.

a)

En quel point le numérateur s'annule-t-il ? Le dénominateur y est-il nul ?

b)

En quel point le dénominateur s'annule-t-il ? Le numérateur y est-il nul ?

c)

Calculer $\lim_{x \rightarrow 4^-} \psi(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 4^+} \psi(x)$.

d)

Où est l'asymptote verticale ? Que se passe-t-il en $x = 1$?

Exo 12 pôle à l'origine

Soit $u(x) = \frac{2}{x(x-3)}$. On étudie la limite en $x_0 = 0$.

a)

Quel est le signe du facteur $(x - 3)$ au voisinage de 0 ?

b)

En déduire le signe du produit $x(x - 3)$ à gauche puis à droite de 0.

c)

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^-} u(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x)$.

Exo 13 reconnaître le bon outil

Pour chaque limite, indiquer d'abord la forme obtenue par remplacement direct : un nombre, une forme $\frac{a}{0\pm}$ (avec $a \neq 0$), ou une forme $\frac{0}{0}$ (indéterminée). *Ne calculer que les deux premiers types.*

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+3}{x^2}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4}$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x}{x-1}$$

d)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+2}{x^2-1}$$

Exo 14 vrai ou faux, style concours

Soit $f(x) = \frac{-1}{2-x}$. Vrai ou faux ? Justifier.

a)

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty.$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty.$$

c)

f admet une limite en 2.

d)

La droite $x = 2$ est asymptote verticale.

Exo 15 dénominateur renversé et numérateur négatif

Soit $m(x) = \frac{x-6}{2-x}$.

a)

Donner D_m et la limite du numérateur en 2 (avec son signe).

b)

Étudier le signe de $2 - x$ à gauche et à droite de 2.

c)

En déduire $\lim_{x \rightarrow 2^-} m(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} m(x)$.

d)

m a-t-elle une limite en 2 ? Quelle asymptote ?

DIFFICILE 13 exercices

Exo 1 deux asymptotes verticales

Soit $f(x) = \frac{x+5}{x^2-x-6}$.

a)

Factoriser $x^2 - x - 6$ et donner le domaine D_f .

b)

Dresser le tableau de signes du dénominateur sur $\mathbb{R}$.

c)

Étudier les limites latérales en $x = 3$: $\lim_{x \rightarrow 3^-} f$ et $\lim_{x \rightarrow 3^+} f$.

d)

Étudier les limites latérales en $x = -2$.

e)

Conclure : combien d'asymptotes verticales ? Donner leurs équations.

Exo 2 **contraste : multiplicité paire ou impaire**

On compare deux fonctions en $x = 1$:

$$f(x) = \frac{3}{x-1} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{3}{(x-1)^2}.$$

a)

Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f$. f a-t-elle une limite en 1 ?

b)

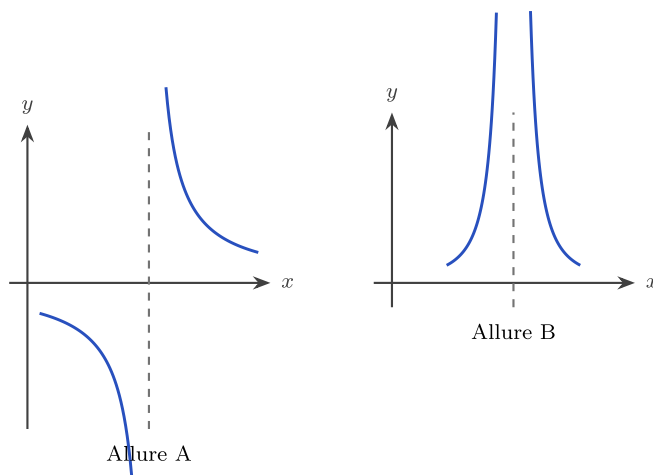
Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} g$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} g$. g a-t-elle une limite en 1 ?

c)

Expliquer, à l'aide du signe du dénominateur, pourquoi g a une limite globale mais pas f .

d)

Associer chaque fonction à l'une des deux allures ci-dessous près de l'asymptote $x = 1$.



mise en situation : dilution qui s'emballe

Exo 3

En pharmacologie, la concentration (en mg/L) d'un principe actif dans une cuve est modélisée, sur $[0 ; 5[$ (temps t en heures), par

$$C(t) = \frac{20}{5 - t}.$$

a)

Calculer $C(0)$, $C(3)$ et $C(4,9)$. Que constate-t-on quand t approche 5 ?

b)

Calculer $\lim_{t \rightarrow 5^-} C(t)$ à l'aide de la règle $\frac{a}{0^\pm}$.

c)

Interpréter : que traduit cette asymptote verticale $t = 5$ pour le modèle ? Est-il réaliste au-delà de $t = 5$?

Exo 4 pôle simple contre pôle double

Soit $f(x) = \frac{x-3}{(x-1)^2(x+2)}$.

a)

Donner le domaine D_f .

b)

Dresser le tableau de signes du dénominateur $(x-1)^2(x+2)$ sur $\mathbb{R}$.

c)

Étudier les limites latérales en $x = -2$.

d)

Étudier les limites latérales en $x = 1$.

e)

Combien d'asymptotes verticales ? En quoi le comportement en -2 diffère-t-il de celui en 1 ?

Exo 5 trou ou asymptote : ne pas confondre avec $\frac{0}{0}$

Soit $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-x-2}$.

a)

Factoriser le numérateur et le dénominateur ; donner D_f .

b)

Simplifier $f(x)$ pour $x \neq 2$.

c)

Étudier la limite en $x = 2$: la droite $x = 2$ est-elle une asymptote verticale ?

d)

Étudier les limites latérales en $x = -1$.

e)

Conclure : combien d'asymptotes verticales ? Que se passe-t-il exactement en $x = 2$?

Exo 6 mise en situation : objet au foyer d'une lentille

En optique, pour une lentille convergente de distance focale $f = 10$ (en cm), la position de l'image d'un objet placé à la distance d_o (en cm, avec $d_o > 0$ et $d_o \neq 10$) est

$$d_i(d_o) = \frac{10 d_o}{d_o - 10}.$$

a)

Calculer d_i pour $d_o = 30$, $d_o = 11$ et $d_o = 10,5$. Que constate-t-on quand d_o approche 10 par valeurs supérieures ?

b)

Calculer $\lim_{d_o \rightarrow 10^+} d_i(d_o)$ à l'aide de la règle $\frac{a}{0^\pm}$.

c)

Calculer $\lim_{d_o \rightarrow 10^-} d_i(d_o)$.

d)

Interpréter : que devient l'image quand l'objet est au foyer ($d_o = 10$) ? La droite $d_o = 10$ est-elle une asymptote verticale ?

Exo 7 avec un paramètre

Soit m un réel et $f(x) = \frac{x+m}{x-2}$.

a)

Pour quelles valeurs de m a-t-on $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$?

b)

Pour quelles valeurs de m a-t-on $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$?

c)

Étudier le cas particulier $m = -2$: que devient f ? Y a-t-il une asymptote verticale en 2 ?

Exo 8 grand tableau : trois pôles

Soit $f(x) = \frac{x+1}{x(x-2)(x+3)}$.

a)

Donner le domaine D_f .

b)

Dresser le tableau de signes du dénominateur $x(x-2)(x+3)$ sur $\mathbb{R}$.

c)

Étudier les limites latérales en $x = -3$.

d)

Étudier les limites latérales en $x = 0$.

e)

Étudier les limites latérales en $x = 2$.

f)

Combien d'asymptotes verticales ? Donner leurs équations.

Exo 9 associer trois fonctions à leur allure

Près de leur asymptote $x = 1$, on considère

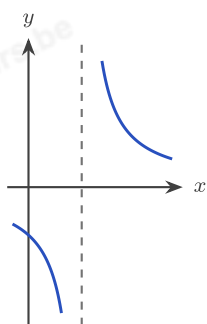
$$f(x) = \frac{2}{x-1}, \quad g(x) = \frac{-2}{x-1}, \quad h(x) = \frac{2}{(x-1)^2}.$$

a)

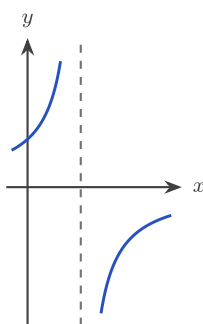
Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1^-}$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+}$ pour chacune des trois fonctions.

b)

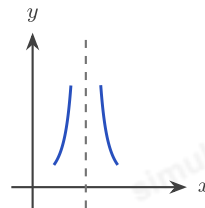
Associer chaque fonction à l'une des trois allures A, B, C ci-dessous.



Allure A



Allure B



Allure C

Exo 10 rôle de la parité de l'exposant

Pour un entier $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = \frac{2}{(x-1)^n}$.

a)

Pour $n = 1$: calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f_1$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f_1$. f_1 a-t-elle une limite en 1 ?

b)

Pour $n = 2$: mêmes questions pour f_2 .

c)

Pour $n = 3$: mêmes questions pour f_3 .

d)

Énoncer la règle générale : selon la parité de n , f_n admet-elle une limite globale en 1 ? Justifier par le signe de $(x-1)^n$.

Exo 11 mise en situation : saturation d'une file d'attente

Le temps moyen d'attente (en heures) à un guichet qui traite 12 clients par heure est modélisé, en fonction du taux d'arrivée λ (clients/heure), par

$$W(\lambda) = \frac{1}{12 - \lambda}, \quad 0 \leq \lambda < 12.$$

a)

Calculer $W(6)$, $W(10)$ et $W(11,5)$. Que constate-t-on quand λ approche 12 ?

b)

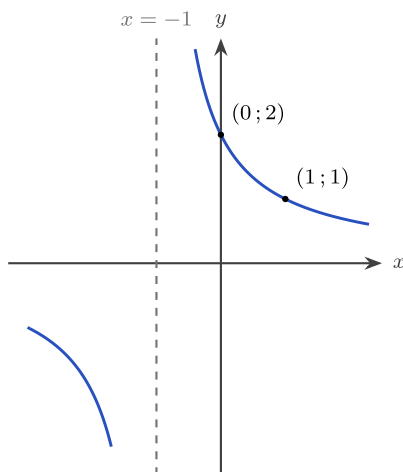
Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow 12^-} W(\lambda)$ à l'aide de la règle $\frac{a}{0^\pm}$.

c)

Interpréter : que traduit l'asymptote verticale $\lambda = 12$? Le modèle a-t-il un sens pour $\lambda \geq 12$?

Exo 12 retrouver la fonction à partir du graphe

La courbe ci-dessous représente une fonction f de la forme $f(x) = \frac{a}{x+1}$, où a est un réel non nul.



a)

Lire graphiquement $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$.

b)

En déduire la nature du point $x = -1$ (f y a-t-elle une limite globale ?).

c)

Sachant que la courbe passe par le point $(0; 2)$, déterminer a . Vérifier avec le point $(1; 1)$.

Exo 13 chasse aux erreurs

Un étudiant calcule les limites latérales de $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ (avec $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$). Deux de ses quatre réponses sont fausses : les retrouver et les corriger.

a)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty.$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty.$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty.$$

d)

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty.$$



DEUXIÈME PARTIE

Corrigés

Chaque exercice repris pas à pas, niveau par niveau.
Compare ta démarche, pas seulement ton résultat.





Une seconde – avant d'ouvrir le corrigé...



Si ce carnet t'aide, rends-nous la pareille : parle de simulationconcours.be à quelqu'un qui prépare le concours. C'est comme ça qu'on peut continuer.

Ce qu'on a préparé pour toi

- ✓ Ce carnet en interactif, avec correction en un clic
- ✓ Les cours complets, chapitre par chapitre – gratuits
- ✓ 3100 QCM type concours, corrigés et expliqués
- ✓ Des fiches de révision à imprimer

Tous les jeudis : simulation du concours en ligne

En conditions réelles – chrono, QCM type concours et score immédiat.



Rejoins-nous sur simulationconcours.be

scanne le QR ou tape l'adresse – puis reviens vérifier tes réponses

Les corrigés

FACILE 15 exercices

Exo 1 appliquer la règle des signes

Règle des signes (0^+ compte +, 0^- compte -) :

1 $\frac{5}{0^+} = +\infty$ b) $\frac{-3}{0^+} = -\infty$ c) $\frac{2}{0^-} = -\infty$ d) $\frac{-7}{0^-} = +\infty$ (moins par moins = plus).

Exo 2 signe du dénominateur

1 $x \rightarrow 4^+ : x > 4$ donc $x - 4 > 0$, c.-à-d. $x - 4 \rightarrow 0^+$.

2 $x \rightarrow 4^- : x < 4$ donc $x - 4 < 0$, c.-à-d. $x - 4 \rightarrow 0^-$.

3 $x \rightarrow 2^+ : x > 2$ donc $2 - x < 0$, c.-à-d. $2 - x \rightarrow 0^-$.

4 $x \rightarrow 1^- : (x - 1)^2 > 0$ (un carré) donc $(x - 1)^2 \rightarrow 0^+$ (des deux côtés d'ailleurs).

Exo 3 limites latérales élémentaires

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{x} = \frac{3}{0^+} = +\infty ; \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{x} = \frac{3}{0^-} = -\infty.$$

b)

$$x \rightarrow 4^+ : x - 4 \rightarrow 0^+, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{x - 4} = \frac{1}{0^+} = +\infty ;$$

$$x \rightarrow 4^- : x - 4 \rightarrow 0^-, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{x - 4} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

Exo 4 une fonction rationnelle simple

$$f(x) = \frac{7}{x+3}.$$

a)

Le numérateur est la constante 7 : il ne tend pas vers 0, il est > 0 .

b)

$$x \rightarrow -3^+ : x + 3 \rightarrow 0^+, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \frac{7}{0^+} = +\infty ;$$

$$x \rightarrow -3^- : x + 3 \rightarrow 0^-, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \frac{7}{0^-} = -\infty.$$

Exo 5 repérer une asymptote verticale

On cherche le zéro du dénominateur (numérateur non nul en ce point) :

1 $x - 5 = 0 \Rightarrow x_0 = 5$ (asymptote verticale $x = 5$).

2 $2x + 6 = 0 \Rightarrow x_0 = -3$ (asymptote verticale $x = -3$).

3 $x^2 = 0 \Rightarrow x_0 = 0$ (asymptote verticale $x = 0$; numérateur $5 \neq 0$).

Exo 6 règle des signes : numérateur positif ou négatif

a)

$$\frac{-4}{0^+} = -\infty \text{ (} a < 0 \text{ divisé par } 0^+ \text{)}.$$

b)

$$\frac{9}{0^-} = -\infty \text{ (} a > 0 \text{ divisé par } 0^- \text{)}.$$

c)

$$\frac{-6}{0^-} = +\infty \text{ (moins par moins)}.$$

d)

$$\frac{8}{0^+} = +\infty.$$

Exo 7 signe d'un dénominateur affine

a)

$$x \rightarrow 3^+ : x > 3 \text{ donc } 2x - 6 > 0, \text{ c.-à-d. } 2x - 6 \rightarrow 0^+.$$

b)

$$x \rightarrow 3^- : x < 3 \text{ donc } 2x - 6 < 0, \text{ c.-à-d. } 2x - 6 \rightarrow 0^-.$$

c)

$$x \rightarrow 5^- : x < 5 \text{ donc } 5 - x > 0, \text{ c.-à-d. } 5 - x \rightarrow 0^+.$$

d)

$$x \rightarrow 3^+ : x > 3 \text{ donc } -3x + 9 < 0, \text{ c.-à-d. } -3x + 9 \rightarrow 0^-.$$

Exo 8 limites latérales : numérateur négatif, coefficient au dénominateur

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2}{x} = \frac{-2}{0^+} = -\infty ; \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2}{x} = \frac{-2}{0^-} = +\infty.$$

b)

$$x \rightarrow (1/2)^+ : 2x - 1 \rightarrow 0^+, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow (1/2)^+} \frac{1}{2x - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty ;$$

$$x \rightarrow (1/2)^- : 2x - 1 \rightarrow 0^-, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow (1/2)^-} \frac{1}{2x - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

Exo 9 fonction rationnelle à numérateur constant négatif

$$f(x) = \frac{-5}{x-2}.$$

a)

Le numérateur est la constante -5 : il ne tend pas vers 0, il est < 0 .

b)

$$x \rightarrow 2^+ : x - 2 \rightarrow 0^+, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{-5}{0^+} = -\infty ;$$

$$x \rightarrow 2^- : x - 2 \rightarrow 0^-, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{-5}{0^-} = +\infty.$$

Exo 10 numérateur variable, non nul au point

$$f(x) = \frac{x+4}{x-1}.$$

a)

En 1, le numérateur vaut $1 + 4 = 5 (> 0)$: il ne s'annule pas.

b)

$$x \rightarrow 1^+ : x - 1 \rightarrow 0^+ \text{ et le numérateur } \rightarrow 5, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{5}{0^+} = +\infty ;$$

$$x \rightarrow 1^- : x - 1 \rightarrow 0^-, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{5}{0^-} = -\infty.$$

Exo 11 dénominateur au carré

$$f(x) = \frac{3}{(x-2)^2}.$$

a)

$(x - 2)^2 > 0$ pour tout $x \neq 2$; il tend vers 0^+ des deux côtés de 2.

b)

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = +\infty = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) : \text{les deux côtés donnent le même résultat, donc } f \text{ a une limite globale } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty.$$

Exo 12 repérer l'asymptote verticale

On cherche le zéro du dénominateur (numérateur non nul en ce point) :

a)

$$x - 7 = 0 \Rightarrow x_0 = 7 \text{ (asymptote verticale } x = 7).$$

b)

$$5 - 2x = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{5}{2} \text{ (asymptote verticale } x = \frac{5}{2}).$$

c)

$$(x + 2)^2 = 0 \Rightarrow x_0 = -2 \text{ (asymptote verticale } x = -2 ; \text{ numérateur } -4 \neq 0).$$

Exo 13 lire un tableau de signes

$$f(x) = \frac{3}{(x-1)(x-4)}, \text{ numérateur } 3 > 0.$$

a)

À gauche de 1, le tableau donne $(x-1)(x-4) > 0$, donc $\rightarrow 0^+ : \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{3}{0^+} = +\infty$.

b)

À droite de 1, le tableau donne $(x-1)(x-4) < 0$, donc $\rightarrow 0^- : \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$.

c)

Les limites latérales sont infinies : la droite $x = 1$ est asymptote verticale.

Exo 14 vrai ou faux

a)

Faux : le signe dépend de celui de a ; si $a < 0$, $\frac{a}{0^+} = -\infty$.

b)

Vrai : changer 0^+ en 0^- inverse le signe du résultat.

c)

Faux : $\frac{0}{0}$ est une forme indéterminée (ce n'est pas $\frac{a}{0^\pm}$).

d)

Vrai : un carré est toujours $\rightarrow 0^+$, donc les deux côtés donnent le même infini.

Exo 15 reconnaître la forme obtenue

a)

$\frac{5}{0^+}$: type $\frac{a}{0^\pm}$, vaut $+\infty$.

b)

$\frac{2}{7}$: simple nombre, vaut $\frac{2}{7}$.

c)

$\frac{-3}{0^-}$: type $\frac{a}{0^\pm}$, vaut $+\infty$ (moins par moins).

d)

$\frac{0}{4}$: simple nombre, vaut 0.

MOYEN 15 exercices

Exo 1 étude complète des deux côtés

$$f(x) = \frac{3x-1}{x-2}.$$

a)

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Numérateur en 2 : $3 \cdot 2 - 1 = 5 (> 0)$.

b)

$x - 2$: négatif si $x < 2 (\rightarrow 0^- \text{ à gauche})$, positif si $x > 2 (\rightarrow 0^+ \text{ à droite})$.

c)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{5}{0^-} = -\infty; \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{5}{0^+} = +\infty.$$

d)

Les côtés diffèrent : **pas de limite globale** en 2. La droite $x = 2$ est **asymptote verticale**.

Exo 2 dénominateur qui change de signe

$$g(x) = \frac{4}{3-x}, \text{ numérateur } 4 > 0.$$

a)

$3 - x > 0$ si $x < 3$, $3 - x < 0$ si $x > 3$ (change de signe en 3).

b)

$$x \rightarrow 3^- : 3 - x \rightarrow 0^+, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty;$$

$$x \rightarrow 3^+ : 3 - x \rightarrow 0^-, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty.$$

Exo 3 dénominateur au carré

$$h(x) = \frac{-2}{(x+1)^2}, \text{ numérateur } -2 < 0.$$

a)

$(x + 1)^2 > 0$ pour tout $x \neq -1$, et $(x + 1)^2 \rightarrow 0^+$ quand $x \rightarrow -1$ (des deux côtés).

b)

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = \frac{-2}{0^+} = -\infty; \lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = \frac{-2}{0^+} = -\infty.$$

c)

Les deux côtés donnent le même résultat : h possède une limite en -1 , $\lim_{x \rightarrow -1} h(x) = -\infty$. (Asymptote verticale $x = -1$.)

Exo 4 dénominateur factorisé

$$k(x) = \frac{5}{(x-1)(x-4)}, \text{ numérateur } 5 > 0; \text{ étude en } 4.$$

a)

En 4, $x - 1 \rightarrow 3 > 0$: le facteur $(x - 1)$ est positif au voisinage de 4.

b)

Le signe de $(x - 1)(x - 4)$ est donc celui de $(x - 4)$: négatif à gauche de 4 ($\rightarrow 0^-$), positif à droite ($\rightarrow 0^+$).

c)

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} k(x) = \frac{5}{0^-} = -\infty; \lim_{x \rightarrow 4^+} k(x) = \frac{5}{0^+} = +\infty. \text{ (Asymptote verticale } x = 4.)$$

Exo 5 reconnaître le bon outil

1 En 3 : $\frac{3+2}{3-1} = \frac{5}{2}$: **forme déterminée**, résultat $\frac{5}{2}$.

2 En 1^+ : numérateur $\rightarrow 3 \neq 0$, dénominateur $x - 1 \rightarrow 0^+$: forme $\frac{3}{0^+}$, donc

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{x-1} = +\infty.$$

3 En 2 : numérateur $x^2 - 4 \rightarrow 0$ et dénominateur $x - 2 \rightarrow 0$: forme $\frac{0}{0}$ **indéterminée** — on ne conclut pas ici (il faudrait factoriser : $\frac{x^2-4}{x-2} = x+2 \rightarrow 4$, voir thèmes 3/5).

Exo 6 étude complète : numérateur négatif

$$f(x) = \frac{2x+3}{x+4}.$$

a)

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$. Numérateur en -4 : $2(-4) + 3 = -5 (< 0)$.

b)

$x + 4$: négatif si $x < -4$ ($\rightarrow 0^-$ à gauche), positif si $x > -4$ ($\rightarrow 0^+$ à droite).

c)

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = \frac{-5}{0^-} = +\infty; \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = \frac{-5}{0^+} = -\infty.$$

d)

Les côtés diffèrent : **pas de limite globale** en -4 . La droite $x = -4$ est **asymptote verticale**.

Exo 7 coefficient et dénominateur renversé

$$g(x) = \frac{-3}{5-2x}, \text{ numérateur } -3 < 0.$$

a)

$5 - 2x = 0$ en $\frac{5}{2}$; $5 - 2x > 0$ si $x < \frac{5}{2}$ ($\rightarrow 0^+$ à gauche), $5 - 2x < 0$ si $x > \frac{5}{2}$ ($\rightarrow 0^-$ à droite).

b)

$\lim_{x \rightarrow (5/2)^-} g(x) = \frac{-3}{0^+} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow (5/2)^+} g(x) = \frac{-3}{0^-} = +\infty$. (Asymptote verticale $x = \frac{5}{2}$.)

Exo 8 dénominateur factorisé : étude à la racine de gauche

$k(x) = \frac{7}{(x+2)(x-3)}$, numérateur $7 > 0$; étude en -2 .

a)

En -2 , $x - 3 \rightarrow -5 < 0$: le facteur $(x - 3)$ est négatif au voisinage de -2 .

b)

Le signe de $(x + 2)(x - 3)$ est donc l'opposé de celui de $(x + 2)$: à gauche ($x + 2 \rightarrow 0^-$) le produit $\rightarrow 0^+$; à droite ($x + 2 \rightarrow 0^+$) le produit $\rightarrow 0^-$.

c)

$\lim_{x \rightarrow -2^-} k(x) = \frac{7}{0^+} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2^+} k(x) = \frac{7}{0^-} = -\infty$. (Asymptote verticale $x = -2$.)

Exo 9 dénominateur au carré, numérateur variable

$h(x) = \frac{x-5}{(x-2)^2}$.

a)

Numérateur en 2 : $2 - 5 = -3 (< 0)$; il ne s'annule pas.

b)

$(x - 2)^2 > 0$ pour $x \neq 2$ et $(x - 2)^2 \rightarrow 0^+$ des deux côtés.

c)

$\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = \frac{-3}{0^+} = -\infty = \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x)$: les deux côtés donnent le même résultat, donc h a une limite globale $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = -\infty$. (Asymptote verticale $x = 2$.)

Exo 10 factoriser un trinôme puis étudier

$\varphi(x) = \frac{-4}{x^2 - 2x - 3}$, numérateur $-4 < 0$.

a)

$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$ (racines 3 et -1). $D_\varphi = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$.

b)

Tableau de signes de $(x - 3)(x + 1)$ (parabole tournée vers le haut) :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$(x-3)(x+1)$		+	0	-	0	+	

c)

En -1 : le dénominateur passe de $+$ (à gauche, $\rightarrow 0^+$) à $-$ (à droite, $\rightarrow 0^-$) :

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \varphi = \frac{-4}{0^+} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \varphi = \frac{-4}{0^-} = +\infty.$$

d)

En 3 : le dénominateur passe de $-$ (à gauche, $\rightarrow 0^-$) à $+$ (à droite, $\rightarrow 0^+$) :

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \varphi = \frac{-4}{0^-} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \varphi = \frac{-4}{0^+} = -\infty.$$

e)

Deux asymptotes verticales : $x = -1$ et $x = 3$.

Exo 11 zéro du numérateur ou pôle ?

$$\psi(x) = \frac{x-1}{x-4}.$$

a)

Le numérateur s'annule en $x = 1$; en 1 le dénominateur vaut $1 - 4 = -3 \neq 0$, donc $\psi(1) = 0$ (la courbe coupe l'axe des abscisses).

b)

Le dénominateur s'annule en $x = 4$; en 4 le numérateur vaut $4 - 1 = 3 \neq 0$, donc 4 est un point interdit (un pôle).

c)

$$\text{Numérateur} \rightarrow 3 > 0 : \lim_{x \rightarrow 4^-} \psi(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty ; \lim_{x \rightarrow 4^+} \psi(x) = \frac{3}{0^+} = +\infty.$$

d)

Asymptote verticale : $x = 4$ seulement. En $x = 1$, pas d'asymptote : c'est simplement un zéro de ψ ($\psi(1) = 0$).

Exo 12 pôle à l'origine

$u(x) = \frac{2}{x(x-3)}$, numérateur $2 > 0$; étude en 0.

a)

En 0, $x - 3 \rightarrow -3 < 0$: le facteur $(x - 3)$ est négatif au voisinage de 0.

b)

Le signe de $x(x - 3)$ est l'opposé de celui de x : à gauche ($x \rightarrow 0^-$) le produit $\rightarrow 0^+$; à droite ($x \rightarrow 0^+$) le produit $\rightarrow 0^-$.

c)

$\lim_{x \rightarrow 0^-} u(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$. (Asymptote verticale $x = 0$.)

Exo 13 reconnaître le bon outil

a)

En 0: numérateur $\rightarrow 3$, dénominateur $x^2 \rightarrow 0^+$: forme $\frac{3}{0^+}$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+3}{x^2} = +\infty$.

b)

En 2: numérateur $x - 2 \rightarrow 0$ et dénominateur $x^2 - 4 \rightarrow 0$: forme $\frac{0}{0}$ **indéterminée** — on ne conclut pas ici (il faudrait factoriser: $\frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x+2} \rightarrow \frac{1}{4}$, voir thèmes 3/5).

c)

En 5: $\frac{2 \cdot 5}{5-1} = \frac{10}{4}$: **forme déterminée**, résultat $\frac{5}{2}$.

d)

En 1^- : numérateur $\rightarrow 3 > 0$; dénominateur $(x-1)(x+1)$, avec $x-1 \rightarrow 0^-$ et $x+1 \rightarrow 2$, donc le produit $\rightarrow 0^-$: forme $\frac{3}{0^-}$, donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+2}{x^2-1} = -\infty$.

Exo 14 vrai ou faux, style concours

$f(x) = \frac{-1}{2-x}$, numérateur $-1 < 0$. Rappel: $x \rightarrow 2^+ \Rightarrow 2-x \rightarrow 0^-$ et $x \rightarrow 2^- \Rightarrow 2-x \rightarrow 0^+$.

a)

Faux: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$ (et non $-\infty$).

b)

Vrai: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$.

c)

Faux: les deux côtés ($+\infty$ et $-\infty$) diffèrent, donc pas de limite globale en 2.

d)

Vrai : les limites latérales sont infinies, donc $x = 2$ est asymptote verticale.

Exo 15 dénominateur renversé et numérateur négatif

$$m(x) = \frac{x-6}{2-x}.$$

a)

$D_m = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Numérateur en 2 : $2 - 6 = -4 (< 0)$.

b)

$2 - x > 0$ si $x < 2$ ($\rightarrow 0^+$ à gauche), $2 - x < 0$ si $x > 2$ ($\rightarrow 0^-$ à droite).

c)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} m(x) = \frac{-4}{0^+} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} m(x) = \frac{-4}{0^-} = +\infty.$$

d)

Les côtés diffèrent : **pas de limite globale** en 2. Asymptote verticale $x = 2$.

DIFFICILE 13 exercices

Exo 1 deux asymptotes verticales

$$f(x) = \frac{x+5}{x^2-x-6}.$$

a)

$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$ (racines 3 et -2). Donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$.

b)

Tableau de signes de $(x - 3)(x + 2)$ (parabole tournée vers le haut) :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$(x-3)(x+2)$		+	0	-	0	+	

c)

En 3 : numérateur $\rightarrow 3 + 5 = 8 > 0$. Le dénominateur passe de - (à gauche, $\rightarrow 0^-$) à + (à droite, $\rightarrow 0^+$) :

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f = \frac{8}{0^-} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f = \frac{8}{0^+} = +\infty.$$

d)

En -2 : numérateur $\rightarrow -2 + 5 = 3 > 0$. Le dénominateur passe de $+$ (à gauche, $\rightarrow 0^+$) à $-$ (à droite, $\rightarrow 0^-$) :

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f = \frac{3}{0^+} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f = \frac{3}{0^-} = -\infty.$$

e)

Deux asymptotes verticales : $x = -2$ et $x = 3$. (f n'a de limite (globale) ni en -2 ni en 3 .)

Exo 2 **contraste : multiplicité paire ou impaire**

a)

$f = \frac{3}{x-1}$: $x \rightarrow 1^- \Rightarrow x-1 \rightarrow 0^-$, donc $\frac{3}{0^-} = -\infty$; $x \rightarrow 1^+ \Rightarrow \frac{3}{0^+} = +\infty$. Côtés opposés : **pas de limite** en 1.

b)

$g = \frac{3}{(x-1)^2}$: $(x-1)^2 \rightarrow 0^+$ des deux côtés, donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} g = \lim_{x \rightarrow 1^+} g = \frac{3}{0^+} = +\infty$. g a une **limite globale** : $+\infty$.

c)

Le dénominateur $x-1$ *change de signe* en 1 (puissance impaire) : les deux côtés donnent des infinis opposés, d'où l'absence de limite. Le dénominateur $(x-1)^2$ *garde* un signe (puissance paire, toujours > 0) : les deux côtés donnent le même infini, d'où une limite globale.

d)

$f \leftrightarrow$ **Allure A** (une branche vers $-\infty$, l'autre vers $+\infty$) ; $g \leftrightarrow$ **Allure B** (les deux branches vers $+\infty$).

Exo 3 **mise en situation : dilution qui s'emballe**

$C(t) = \frac{20}{5-t}$ sur $[0; 5[$.

a)

$C(0) = \frac{20}{5} = 4$; $C(3) = \frac{20}{2} = 10$; $C(4,9) = \frac{20}{0,1} = 200$. La concentration *explose* à mesure que t approche 5.

b)

$t \rightarrow 5^-$: $5-t \rightarrow 0^+$ et le numérateur $20 > 0$, donc $\lim_{t \rightarrow 5^-} C(t) = \frac{20}{0^+} = +\infty$.

c)

La droite $t = 5$ est une **asymptote verticale** : le modèle prévoit une concentration qui tend vers l'infini en $t = 5$. Ce n'est *pas* réaliste physiquement (une concentration reste bornée) : le modèle n'est valable que sur $[0 ; 5[$ et cesse d'avoir un sens en $t = 5$ et au-delà.

Exo 4 pôle simple contre pôle double

$$f(x) = \frac{x-3}{(x-1)^2(x+2)}.$$

a)

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}.$$

b)

$(x-1)^2 \geq 0$ (nul en 1) et $(x+2)$ change de signe en -2 ; le signe du produit est donc celui de $(x+2)$ (sauf aux zéros) :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$(x-1)^2$		+	+	+	0	+	
$x+2$		-	0	+	+	+	
$(x-1)^2(x+2)$		-	0	+	0	+	

c)

En -2 : numérateur $\rightarrow -2 - 3 = -5 < 0$; $(x-1)^2 \rightarrow 9 > 0$, donc le dénominateur a le signe de $(x+2)$: $\rightarrow 0^-$ à gauche, $\rightarrow 0^+$ à droite.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f = \frac{-5}{0^-} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f = \frac{-5}{0^+} = -\infty.$$

d)

En 1 : numérateur $\rightarrow 1 - 3 = -2 < 0$; $(x-1)^2 \rightarrow 0^+$ et $(x+2) \rightarrow 3 > 0$, donc le dénominateur $\rightarrow 0^+$ des deux côtés.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f = \frac{-2}{0^+} = -\infty = \lim_{x \rightarrow 1^+} f.$$

e)

Deux asymptotes verticales : $x = -2$ et $x = 1$. En -2 (facteur simple) les infinis sont *opposés* : pas de limite globale. En 1 (facteur au carré) le même infini des deux côtés : f a une **limite globale** $\lim_{x \rightarrow 1} f = -\infty$.

Exo 5 trou ou asymptote : ne pas confondre avec $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}.$$

a)

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2) \text{ et } x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1). D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}.$$

b)

$$\text{Pour } x \neq 2 : f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{x+2}{x+1}.$$

c)

En 2, la forme brute est $\frac{0}{0}$ (le facteur $(x - 2)$ s'annule en haut et en bas) : ce n'est *pas* une forme $\frac{a}{0}$. Après simplification, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{2+2}{2+1} = \frac{4}{3}$ (fini). Donc $x = 2$ n'est **pas** une asymptote : c'est un « trou » (la valeur 2 est simplement exclue du domaine).

d)

Sur la forme simplifiée $\frac{x+2}{x+1}$, le numérateur $\rightarrow 1 \neq 0$ en -1 :

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f = \frac{1}{0^-} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

e)

Une **seule** asymptote verticale : $x = -1$. En $x = 2$ la limite existe ($= \frac{4}{3}$) : pas d'asymptote, seulement un point manquant.

Exo 6 mise en situation : objet au foyer d'une lentille

$$d_i(d_o) = \frac{10 d_o}{d_o - 10}, \text{ numérateur } 10 d_o > 0 \text{ pour } d_o > 0.$$

a)

$d_i(30) = \frac{300}{20} = 15$; $d_i(11) = \frac{110}{1} = 110$; $d_i(10,5) = \frac{105}{0,5} = 210$. La position de l'image *explose* à mesure que d_o approche 10.

b)

$$d_o \rightarrow 10^+ : \text{numérateur} \rightarrow 100 > 0 \text{ et } d_o - 10 \rightarrow 0^+, \text{ donc } \lim_{d_o \rightarrow 10^+} d_i = \frac{100}{0^+} = +\infty.$$

c)

$$d_o \rightarrow 10^- : d_o - 10 \rightarrow 0^-, \text{ donc } \lim_{d_o \rightarrow 10^-} d_i = \frac{100}{0^-} = -\infty \text{ (image « virtuelle », de l'autre côté de la lentille).}$$

d)

Quand l'objet est au foyer, l'image part à l'infini (les rayons émergents deviennent parallèles) ; la droite $d_o = 10$ est une **asymptote verticale** : le modèle ne donne aucune position finie en $d_o = 10$.

Exo 7 avec un paramètre

$f(x) = \frac{x+m}{x-2}$. En 2, le numérateur $\rightarrow 2+m$; $x \rightarrow 2^- \Rightarrow x-2 \rightarrow 0^-$ et $x \rightarrow 2^+ \Rightarrow x-2 \rightarrow 0^+$.

a)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f = \frac{2+m}{0^-} = +\infty \text{ exige } 2+m < 0, \text{ soit } \boxed{m < -2}.$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f = \frac{2+m}{0^+} = +\infty \text{ exige } 2+m > 0, \text{ soit } \boxed{m > -2}.$$

c)

Si $m = -2$: $f(x) = \frac{x-2}{x-2} = 1$ pour $x \neq 2$, donc $\lim_{x \rightarrow 2} f = 1$ (fini). Le numérateur s'annule aussi en 2 (forme $\frac{0}{0}$): **pas** d'asymptote verticale, mais un trou en $(2; 1)$.

Exo 8 grand tableau : trois pôles

$$f(x) = \frac{x+1}{x(x-2)(x+3)}.$$

a)

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 2\}.$$

b)

Dénominateur $x(x-2)(x+3)$ (degré 3, positif en $+\infty$):

x	$-\infty$	-3	0	2	$+\infty$
$x(x-2)(x+3)$	$-$	0	$+$	0	$+$

c)

En -3 : numérateur $\rightarrow -2 < 0$; dénominateur $-$ à gauche ($\rightarrow 0^-$), $+$ à droite ($\rightarrow 0^+$).

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f = \frac{-2}{0^-} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -3^+} f = \frac{-2}{0^+} = -\infty.$$

d)

En 0 : numérateur $\rightarrow 1 > 0$; dénominateur $+$ à gauche ($\rightarrow 0^+$), $-$ à droite ($\rightarrow 0^-$).

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f = \frac{1}{0^+} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

e)

En 2 : numérateur $\rightarrow 3 > 0$; dénominateur — à gauche ($\rightarrow 0^-$), + à droite ($\rightarrow 0^+$).

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f = \frac{3}{0^-} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f = \frac{3}{0^+} = +\infty.$$

f)

Trois asymptotes verticales : $x = -3, x = 0$ et $x = 2$.

Exo 9 associer trois fonctions à leur allure

a)

$f = \frac{2}{x-1} : x \rightarrow 1^- \Rightarrow \frac{2}{0^-} = -\infty$ et $x \rightarrow 1^+ \Rightarrow \frac{2}{0^+} = +\infty$ (infinis opposés).

$g = \frac{-2}{x-1} : x \rightarrow 1^- \Rightarrow \frac{-2}{0^-} = +\infty$ et $x \rightarrow 1^+ \Rightarrow \frac{-2}{0^+} = -\infty$ (miroir de f).

$h = \frac{2}{(x-1)^2} : (x-1)^2 \rightarrow 0^+$ des deux côtés, donc $\frac{2}{0^+} = +\infty$ des deux côtés.

b)

$f \leftrightarrow$ **Allure A** (branche gauche vers $-\infty$, droite vers $+\infty$) ; $g \leftrightarrow$ **Allure B** (branche gauche vers $+\infty$, droite vers $-\infty$) ; $h \leftrightarrow$ **Allure C** (les deux branches vers $+\infty$).

Exo 10 rôle de la parité de l'exposant

$$f_n(x) = \frac{2}{(x-1)^n}.$$

a)

$n = 1 : (x-1)$ change de signe en 1 : $x \rightarrow 1^- \Rightarrow \frac{2}{0^-} = -\infty, x \rightarrow 1^+ \Rightarrow \frac{2}{0^+} = +\infty$. Côtés opposés : **pas** de limite globale.

b)

$n = 2 : (x-1)^2 \rightarrow 0^+$ des deux côtés, donc $\frac{2}{0^+} = +\infty$ des deux côtés : **limite globale** $+\infty$.

c)

$n = 3 : (x-1)^3$ (puissance impaire) change de signe : $x \rightarrow 1^- \Rightarrow \frac{2}{0^-} = -\infty, x \rightarrow 1^+ \Rightarrow \frac{2}{0^+} = +\infty$. **Pas** de limite globale.

d)

Si n est pair, $(x-1)^n > 0$ des deux côtés : même infini, donc limite globale ($+\infty$ ici, du signe de $2 > 0$). Si n est impair, $(x-1)^n$ change de signe : infinis opposés, donc pas de limite globale. Dans tous les cas, $x = 1$ est asymptote verticale.

Exo 11 mise en situation : saturation d'une file d'attente

$$W(\lambda) = \frac{1}{12-\lambda}, \text{ numérateur } 1 > 0.$$

a)

$W(6) = \frac{1}{6}$; $W(10) = \frac{1}{2}$; $W(11,5) = \frac{1}{0,5} = 2$ (heures). Le temps d'attente *explose* quand λ approche 12.

b)

$\lambda \rightarrow 12^- : 12 - \lambda \rightarrow 0^+$, donc $\lim_{\lambda \rightarrow 12^-} W(\lambda) = \frac{1}{0^+} = +\infty$.

c)

$\lambda = 12$ correspond à la **saturation** (le taux d'arrivée égale la capacité) : l'attente tend vers l'infini, d'où l'asymptote verticale $\lambda = 12$. Pour $\lambda \geq 12$ le modèle n'a plus de sens ($12 - \lambda \leq 0$) : la file diverge.

Exo 12 retrouver la fonction à partir du graphe

$$f(x) = \frac{a}{x+1}.$$

a)

Le graphe donne $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$ (la branche de gauche plonge) et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ (la branche de droite monte).

b)

Les deux infinis sont *opposés* : f n'a pas de limite globale en -1 ; la droite $x = -1$ est une asymptote verticale.

c)

$f(0) = \frac{a}{0+1} = a = 2$, donc $a = 2$. Vérification : $f(1) = \frac{2}{1+1} = 1$, conforme au point $(1 ; 1)$. Ainsi $f(x) = \frac{2}{x+1}$.

Exo 13 chasse aux erreurs

$f(x) = \frac{1}{x^2-1}$: signe de $x^2 - 1$ positif si $|x| > 1$, négatif si $|x| < 1$; numérateur $1 > 0$.

a)

$x \rightarrow 1^+ : |x| > 1$, donc $x^2 - 1 \rightarrow 0^+$ et $\frac{1}{0^+} = +\infty$. **Correct.**

b)

$x \rightarrow 1^- : |x| < 1$, donc $x^2 - 1 \rightarrow 0^-$ et $\frac{1}{0^-} = -\infty$. **Fausse** : la bonne réponse est $-\infty$ (et non $+\infty$).

c)

$x \rightarrow -1^- : x < -1$ donc $|x| > 1$, $x^2 - 1 \rightarrow 0^+$ et $\frac{1}{0^+} = +\infty$. **Correct.**

d)

$x \rightarrow -1^+ : x$ proche de -1 avec $|x| < 1$, donc $x^2 - 1 \rightarrow 0^-$ et $\frac{1}{0^-} = -\infty$. **Fausse** : la bonne réponse est $-\infty$.

Les deux erreurs sont donc les affirmations **b)** et **d)**.



Tous les exos cochés ? Passe au niveau réel.



Ce carnet est un extrait de notre bibliothèque d'entraînement — la suite se joue en ligne.

Sur simulationconcours.be

- ✓ Le même carnet en interactif, avec correction en un clic
- ✓ Les autres mécaniques de la fiche, niveau par niveau
- ✓ 3100 QCM type concours, corrigés et expliqués
- ✓ Les cours complets — gratuits — et les fiches de révision

Tous les jeudis : simulation du concours en ligne

En conditions réelles — chrono, QCM type concours et score immédiat.



Rejoins-nous sur simulationconcours.be

scanne le QR ou tape l'adresse — les cours complets sont gratuits