



simulationconcours.be



Mathématiques

Carnet d'entraînement



Angles associés

Trigonométrie · Mécanique 2 — des exercices calibrés
concours, du plus simple au plus retors.

44 exercices

3 niveaux

corrigés détaillés

Comment bosser ce carnet

- ✓ Lis d'abord le tutoriel : la mécanique y est expliquée pas à pas
- ✓ Fais chaque niveau en entier **avant** d'ouvrir les corrigés
- ✓ Note à côté de chaque exo : réussi, hésité ou raté — et rejoue les ratés 48 h plus tard



simulationconcours.be

scanne & continue en ligne

Sommaire

- 1 Le tutoriel — la mécanique expliquée
- 2 Les exercices Facile x15 · Moyen x15 · Difficile x14
- 3 Les corrigés détaillés exercice par exercice

Le tutoriel

Ce document est un **carnet d'exercices** : on t'explique d'abord la mécanique, puis tu la travailles sur 44 exercices classés en trois niveaux. Les corrigés détaillés t'attendent en deuxième partie, après la page « Corrigés » — pas avant de l'avoir mérité.

height 1pt

Deux angles sont **associés** lorsque leurs points sur le cercle sont **symétriques** (par un axe ou par le centre) : leurs nombres trigonométriques sont alors les mêmes *au signe près*, ou *échangés* ($\sin \leftrightarrow \cos$). Objectif : **ramener n'importe quel angle à un angle connu** du premier quadrant.

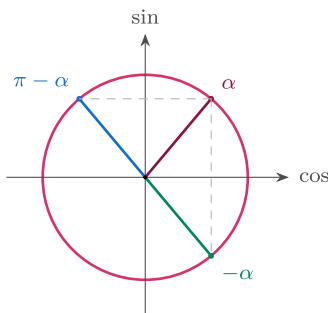
1. Les cinq familles à connaître Dans tout ce qui suit, α est un angle *quelconque*.

Famille (symétrie)	angle	cos	sin	tg
Opposés (axe des cos)	$-\alpha$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
Supplémentaires (axe des sin)	$\pi - \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
Anti-suppl. (centre O)	$\pi + \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
Complémentaires (droite $y = x$)	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{cotg} \alpha$
Anti-complém.	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\operatorname{cotg} \alpha$

L'ESSENTIEL deux réflexes qui résument tout

- **Autour de π** (c'est-à-dire $-\alpha, \pi - \alpha, \pi + \alpha$) : la *fonction ne change pas* (cos reste cos, sin reste sin), seul le **signe** peut changer.
 - **Autour de $\frac{\pi}{2}$** (c'est-à-dire $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$) : la fonction *s'échange* ($\sin \leftrightarrow \cos, \operatorname{tg} \leftrightarrow \operatorname{cotg}$), et le signe peut changer.
- Pour le signe : place α « petit et positif » et regarde le quadrant de l'angle associé.

2. Lire une symétrie sur le cercle Ci-dessous : les **opposés** α et $-\alpha$ (miroir par l'axe horizontal : même cos, sin opposé) et les **supplémentaires** α et $\pi - \alpha$ (miroir par l'axe vertical : même sin, cos opposé).



EXEMPLE même sinus, même tangente

Deux supplémentaires ont le même sinus : $\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$. Deux anti-supplémentaires ont la même tangente : $\operatorname{tg} 210^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ + 30^\circ) = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (période π).

3. Ramener n'importe quel angle au premier quadrant

MÉTHODE réduction d'un angle quelconque

- 1 **Un tour** : ajoute/retranche 2π (ou 360°) pour tomber dans $[0; 2\pi[$.
- 2 **Quadrant $\Rightarrow$ signe** : repère le quadrant, il donne le signe du résultat.
- 3 **Angle de référence** : écris l'angle sous la forme $\pi \pm \beta$, $-\beta$ ou $\frac{\pi}{2} \pm \beta$ avec β aigu (le référent du 1^{er} quadrant).
- 4 **Applique la famille** correspondante, puis recolte le signe de l'étape 2.

EXEMPLE valeur numérique et expression littérale

$\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$ (supplémentaires) $\Rightarrow \cos \frac{2\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ (cohérent : 120° est au quadrant II, où $\cos < 0$). De même $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$ (anti-complém.) et $\frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$.

PIÈGE les trois erreurs qui coûtent des points

- Confondre supplémentaires ($\pi - \alpha$, même $\sin$) et anti-supplémentaires ($\pi + \alpha$, même tg).
- Oublier que $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ échange $\sin$ et $\cos$ (ne pas laisser $\cos$ donner un $\cos$).
- Se tromper de signe : dans le doute, prends $\alpha = 30^\circ$ et vérifie numériquement.

Les exercices

FACILE 15 exercices

Exo 1 Opposés ($-\alpha$)

Simplifie chaque expression en fonction de α .

a)

$$\cos(-\alpha)$$

b)

$$\sin(-\alpha)$$

c)

$$\operatorname{tg}(-\alpha)$$

d)

$$\sin(-\alpha) + \sin \alpha$$

Exo 2 Supplémentaires ($\pi - \alpha$)

Simplifie en fonction de α , puis conclus la valeur numérique de (d).

a)

$$\sin(\pi - \alpha)$$

b)

$$\cos(\pi - \alpha)$$

c)

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$$

d)

$$\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

Exo 3 Anti-supplémentaires ($\pi + \alpha$)

Simplifie en fonction de α .

a)

$$\cos(\pi + \alpha)$$

b)

$$\sin(\pi + \alpha)$$

c)

$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha)$$

d)

$$\operatorname{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

Exo 4 Complémentaires et anti-complémentaires ($\frac{\pi}{2} \pm \alpha$)

Simplifie en fonction de α (attention : $\sin$ et $\cos$ s'échangent).

a)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

b)

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

c)

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

d)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

Exo 5 Reconnaître la nature de deux angles

Pour chaque couple, dis s'il s'agit d'angles *opposés*, *complémentaires*, *supplémentaires* ou *anti-supplémentaires*.

a)

$$30^\circ \text{ et } 150^\circ$$

b)

$$40^\circ \text{ et } 50^\circ$$

c)

$$70^\circ \text{ et } -70^\circ$$

d)

$$20^\circ \text{ et } 200^\circ$$

Exo 6 Opposés : valeurs exactes

En utilisant la parité (cos pair, sin et tg impaires), donne la valeur exacte.

a)

$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

b)

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

c)

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

d)

$$\cos(-60^\circ)$$

Exo 7 Supplémentaires : valeurs exactes

Écris l'angle sous la forme $\pi - \beta$ (ou $180^\circ - \beta$) avec β remarquable, puis conclus.

a)

$$\cos 150^\circ$$

b)

$$\sin 135^\circ$$

c)

$$\operatorname{tg} 120^\circ$$

d)

$$\cos \frac{3\pi}{4}$$

Exo 8 Anti-supplémentaires : valeurs exactes

Écris l'angle sous la forme $\pi + \beta$ (ou $180^\circ + \beta$) avec β remarquable, puis conclus.

a)

$$\sin 210^\circ$$

b)

$$\cos 225^\circ$$

c)

$$\operatorname{tg} 240^\circ$$

d)

$$\cos \frac{7\pi}{6}$$

Exo 9

Complémentaires et anti-complémentaires : valeurs exactes

Rappel : autour de $\frac{\pi}{2}$, le sinus et le cosinus **s'échangent**.

a)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$$

b)

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$$

c)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

d)

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$$

Exo 10

Compléter une égalité de complémentaires

Complète par un angle du premier quadrant, en utilisant $\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ et ses variantes.

a)

$$\cos 70^\circ = \sin(\dots)$$

b)

$$\sin 25^\circ = \cos(\dots)$$

c)

$$\operatorname{tg} 40^\circ = \operatorname{cotg}(\dots)$$

d)

$$\cos \frac{\pi}{5} = \sin(\dots)$$

Exo 11

Signe selon le quadrant

Sans calculer la valeur, donne uniquement le *signe* (+ ou −) en repérant le quadrant.

a)

$$\sin 200^\circ$$

b)

$$\cos 160^\circ$$

c)

$$\operatorname{tg} 300^\circ$$

d)

$$\cos(-40^\circ)$$

Exo 12

Trouver l'angle de référence

Donne l'angle aigu de référence β (du premier quadrant) et la famille qui relie l'angle donné à β .

a)

$$135^\circ$$

b)

$$210^\circ$$

c)

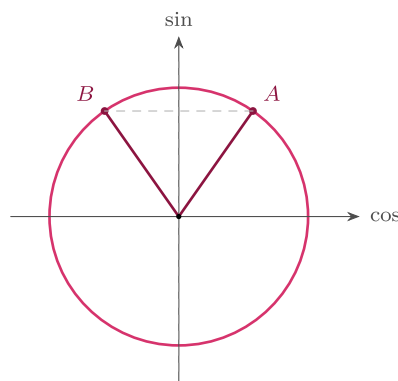
$$330^\circ$$

d)

$$\frac{2\pi}{3}$$

Exo 13 Lire une symétrie sur le cercle

Sur la figure, A est le point d'angle 55° et B celui d'angle 125° .



a)

Par quelle symétrie passe-t-on de A à B ?

b)

Quelle est la nature des angles 55° et 125° ?

c)

Compare $\sin 55^\circ$ et $\sin 125^\circ$.

d)

Compare $\cos 55^\circ$ et $\cos 125^\circ$.

Exo 14 Même valeur qu'un angle aigu

Donne un angle β du premier quadrant ($0^\circ < \beta < 90^\circ$) vérifiant l'égalité, et nomme la famille.

a)

$$\sin 130^\circ = \sin \beta$$

b)

$$\cos 310^\circ = \cos \beta$$

c)

$$\operatorname{tg} 200^\circ = \operatorname{tg} \beta$$

d)

$$\sin \frac{4\pi}{5} = \sin \beta$$

Exo 15 Nature et nombre conservé

Pour chaque couple, donne la *nature* des angles, puis le nombre trigonométrique qu'ils *partagent* (même $\sin$, même $\cos$ ou même tg).

a)

$$50^\circ \text{ et } 130^\circ$$

b)

$$50^\circ \text{ et } 230^\circ$$

c)

$$50^\circ \text{ et } -50^\circ$$

d)

$$50^\circ \text{ et } 40^\circ$$

MOYEN 15 exercices

Exo 1 Réduire, puis évaluer

Écris l'angle sous la forme $\pi \pm \beta$, $\frac{\pi}{2} \pm \beta$ ou $-\beta$ avec β remarquable, puis donne la valeur exacte.

a)

$$\sin 210^\circ$$

b)

$$\cos(-120^\circ)$$

c)

$$\operatorname{tg} 225^\circ$$

d)

$$\cos 135^\circ$$

e)

$$\sin \frac{5\pi}{6}$$

Exo 2 Simplifier une expression littérale

Simplifie chaque expression le plus possible (le résultat est un nombre, $\pm \sin \alpha$, $\pm \cos \alpha \dots$).

$$(a) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(\pi - \alpha) \quad (b) \sin(-\alpha) + \sin(\pi + \alpha)$$

$$(c) \frac{\operatorname{tg}(\pi + \alpha)}{\operatorname{tg}(-\alpha)} \quad (d) \cos(\pi - \alpha) + \cos(-\alpha)$$

Exo 3 Lesquelles valent $\sin 5^\circ$?

On pose $\alpha = 5^\circ$ (angle du 1^{er} quadrant). Parmi les expressions suivantes, détermine *lesquelles* sont égales à $\sin 5^\circ$, en justifiant par la famille d'angles.

a)

$$\sin 175^\circ$$

b)

$$-\cos 95^\circ$$

c)

$$\sin(-5^\circ)$$

d)

$$-\sin 185^\circ$$

e)

$$\cos(-85^\circ)$$

Exo 4

Lesquelles valent $\operatorname{tg} 10^\circ$?

On pose $\alpha = 10^\circ$. Détermine lesquelles de ces expressions sont égales à $\operatorname{tg} 10^\circ$.

a)

$$\operatorname{tg} 190^\circ$$

b)

$$\operatorname{cotg} 80^\circ$$

c)

$$\operatorname{tg} 170^\circ$$

d)

$$-\operatorname{tg}(-10^\circ)$$

Exo 5 Vrai ou Faux

Justifie brièvement (nomme la bonne famille).

a)

5° et 175° sont anti-supplémentaires.

b)

5° et 85° sont complémentaires.

c)

$\cos 100^\circ = -\sin 10^\circ$.

d)

$\sin 250^\circ = \sin 70^\circ$.

Exo 6 Réduire puis évaluer (angles négatifs ou $> 360^\circ$)

Ramène d'abord dans $[0; 2\pi[$ (ou $[0^\circ; 360^\circ[$) si besoin, puis donne la valeur exacte.

a)

$$\cos(-135^\circ)$$

b)

$$\sin \frac{7\pi}{6}$$

c)

$$\operatorname{tg} \frac{5\pi}{3}$$

d)

$$\cos 420^\circ$$

e)

$$\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$$

Exo 7 Simplifier une expression littérale

Simplifie le plus possible (le résultat est un nombre, $\pm \sin \alpha$, $\pm \cos \alpha$...).

(a) $\cos(\pi - \alpha) + \cos(\pi + \alpha)$ (b) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \cos(\pi - \alpha)$

(c) $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) \operatorname{cotg}(\pi + \alpha)$ (d) $\frac{\sin(\pi + \alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$

Exo 8 Des expressions indépendantes de α

Simplifie chacune et vérifie qu'elle ne dépend pas de α .

a)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cos(-\alpha) + \sin(\pi + \alpha) \sin(-\alpha).$$

b)

$$\cos(\pi + \alpha) \cos(-\alpha) - \sin(\pi - \alpha) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

c)

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

Exo 9 Lesquelles valent $\cos 40^\circ$?

Détermine lesquelles de ces expressions sont égales à $\cos 40^\circ$, en justifiant par la famille.

a)

$$\cos(-40^\circ)$$

b)

$$\sin 130^\circ$$

c)

$$\cos 220^\circ$$

d)

$$-\cos 140^\circ$$

e)

$$\sin(-50^\circ)$$

Exo 10 Vrai ou Faux (valeurs exactes)

Justifie en calculant la valeur exacte ou en nommant la famille.

a)

$$\cos 150^\circ = \sin(-60^\circ).$$

b)

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}.$$

c)

$$\cos 80^\circ = \sin 170^\circ.$$

d)

$$\cos \frac{5\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{3}.$$

Exo 11 Utiliser une donnée

On donne $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ avec α aigu. *Sans chercher α* , calcule :

a)

$$\cos(\pi - \alpha)$$

b)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

c)

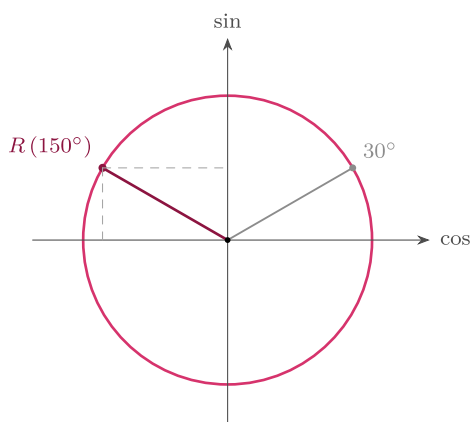
$$\cos(2\pi - \alpha)$$

d)

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

Exo 12 Lire une réduction sur le cercle

Le point R ci-dessous est associé à l'angle 150° ; on a tracé l'angle de référence 30° .



a)

À quel angle aigu 150° est-il associé, et par quelle symétrie ?

b)

Déduis-en $\cos 150^\circ$ et $\sin 150^\circ$.

c)

Quel autre angle de $[0^\circ; 360^\circ[$ a le même sinus que 150° ?

d)

Quel angle de $[0^\circ; 360^\circ[$ a le même cosinus que 150° ?

Exo 13 Résoudre à l'aide des angles associés

Trouve tous les angles $x \in [0^\circ; 360^\circ[$ vérifiant :

a)

$$\sin x = \sin 40^\circ$$

b)

$$\cos x = \cos 50^\circ$$

c)

$$\cos x = -\cos 50^\circ$$

d)

$$\sin x = -\sin 40^\circ$$

Exo 14 Tangente et cotangente : valeurs exactes

Réduis, puis donne la valeur exacte.

a)

$$\operatorname{tg} \frac{5\pi}{6}$$

b)

$$\operatorname{cotg} \frac{2\pi}{3}$$

c)

$$\operatorname{tg} \frac{7\pi}{4}$$

d)

$$\operatorname{cotg} \frac{5\pi}{4}$$

Exo 15 Chaîner plusieurs symétries

Simplifie au maximum.

$$(a) \frac{\sin(\pi - \alpha) \cos(2\pi - \alpha)}{\cos(\pi + \alpha)}$$

$$(b) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos(\pi - \alpha) + \sin(\pi + \alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

$$(c) \frac{\cos(-\alpha) + \cos(\pi - \alpha)}{\sin(\pi + \alpha)}$$

DIFFICILE 14 exercices

Exo 1 Un angle, deux chemins

On veut calculer $\cos \frac{5\pi}{6}$ et $\sin \frac{5\pi}{6}$ de deux façons.

a)

Écris $\frac{5\pi}{6}$ comme le *supplémentaire* d'un angle remarquable, et déduis-en $\cos \frac{5\pi}{6}$.

b)

Écris maintenant $\frac{5\pi}{6}$ sous la forme $\frac{\pi}{2} + \beta$, et recalcule $\cos \frac{5\pi}{6}$ par les *anti-complémentaires*.

c)

Les deux résultats coïncident-ils ? Conclus.

d)

Reprends les deux méthodes pour obtenir $\sin \frac{5\pi}{6}$.

Exo 2 Prouver une simplification

Simplifie chaque expression (le résultat est un nombre, ou $\pm \sin \alpha$, $\pm \cos \alpha$).

a)

$$A = \sin(\pi - \alpha) + \sin(\pi + \alpha).$$

b)

$$B = \cos(\pi + \alpha) - \cos(-\alpha).$$

c)

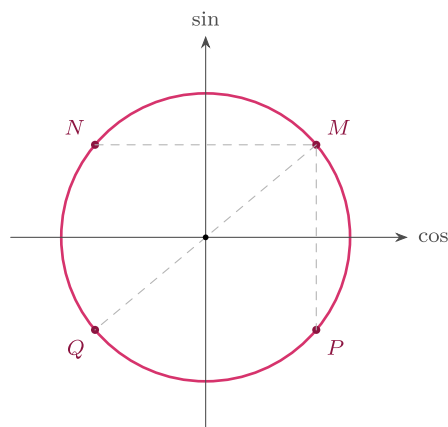
$$C = \operatorname{tg}(\pi - \alpha) + \operatorname{tg}(\pi + \alpha).$$

d)

$$D = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \right]^2 + \left[\sin(\pi - \alpha) \right]^2.$$

Exo 3 Quatre points associés

Sur le cercle, M est le point d'angle α (avec α aigu). On note $a = \cos \alpha$ et $b = \sin \alpha$, de sorte que $M = (a; b)$. On place aussi N (angle $\pi - \alpha$), P (angle $-\alpha$) et Q (angle $\pi + \alpha$).



a)

Exprime les coordonnées de N , P et Q en fonction de a et b .

b)

Parmi M , N , P , Q , lesquels ont la même *ordonnée* (même sinus) ? la même *abscisse* (même cosinus) ?

c)

Quels sont les deux points symétriques par rapport au *centre* O ?

d)

Application : $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Donne les coordonnées exactes de M , N , P , Q .

Exo 4 Toutes les écritures d'un même nombre

Détermine *lesquelles* des expressions suivantes sont égales à $\frac{1}{2}$. Justifie chacune par la famille d'angles associés.

a)

$$\sin \frac{5\pi}{6}$$

b)

$$\cos \frac{2\pi}{3}$$

c)

$$-\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

d)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$$

e)

$$-\cos \frac{2\pi}{3}$$

Exo 5 Une somme qui s'effondre

On considère $S = \cos 0^\circ + \cos 60^\circ + \cos 120^\circ + \cos 180^\circ + \cos 240^\circ + \cos 300^\circ$.

a)

Regroupe les six termes en trois paires d'angles *anti-supplémentaires* (qui diffèrent de 180°) et montre que chaque paire est nulle.

b)

Déduis-en la valeur de S .

c)

Interprète S comme la somme des abscisses des six sommets d'un hexagone régulier inscrit dans le cercle : pourquoi le résultat était-il prévisible ?

Exo 6 Une identité indépendante de α

Montre que, pour tout réel α ,

$$\cos^2 \alpha + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos^2(\pi - \alpha) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = 2.$$

a)

Réécris chacun des quatre termes sous la forme $\cos^2 \alpha$ ou $\sin^2 \alpha$.

b)

Conclus que la somme vaut 2, quelle que soit la valeur de α .

c)

Vérifie le résultat pour $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Exo 7 Deux fonctions, une équation

On pose $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ et $g(x) = \sin(\pi - x) - \sin(\pi + x)$.

a)

Simplifie $f(x)$ à l'aide des angles associés.

b)

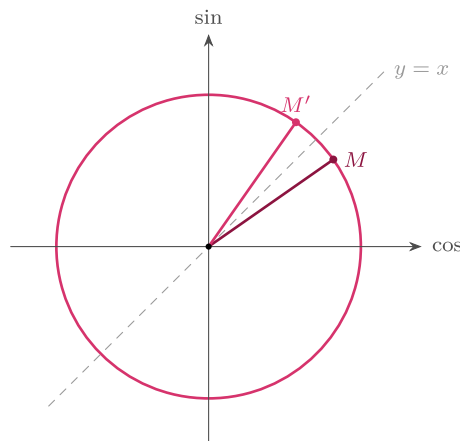
Simplifie $g(x)$.

c)

Résous l'équation $f(x) = g(x)$ pour $x \in [0; 2\pi[$.

Exo 8 Symétrie par la première bissectrice

Sur la figure, M est le point associé à α (avec $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) et M' son symétrique par rapport à la droite $y = x$.



a)

À quel angle M' est-il associé ? Nomme la famille.

b)

Sachant $M = (\cos \alpha ; \sin \alpha)$, donne les coordonnées de M' .

c)

Soit M'' le symétrique de M par rapport à l'axe Oy : à quel angle correspond-il, et quelles sont ses coordonnées ?

d)

Montre que M' et M'' ont la même ordonnées si et seulement si $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Exo 9 Le rôle d'un entier n

Soit α un réel et $n \in \mathbb{Z}$.

a)

Montre que $\cos(n\pi + \alpha) = (-1)^n \cos \alpha$ (distingue n pair et n impair).

b)

Établis de même une formule pour $\sin(n\pi - \alpha)$.

c)

Explique pourquoi $\operatorname{tg}(n\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$ pour tout n .

d)

Application : calcule $\cos(7\pi + \frac{\pi}{3})$ et $\operatorname{tg}(100\pi + \frac{\pi}{4})$.

Exo 10 Prouver une identité fractionnaire

Montre que, pour tout α où l'expression est définie,

$$\frac{\sin(\pi - \alpha)}{1 + \cos(\pi + \alpha)} + \frac{\sin(\pi + \alpha)}{1 + \cos(-\alpha)} = 2 \cotg \alpha.$$

a)

Réduis chaque nombre trigonométrique associé (numérateurs et dénominateurs).

b)

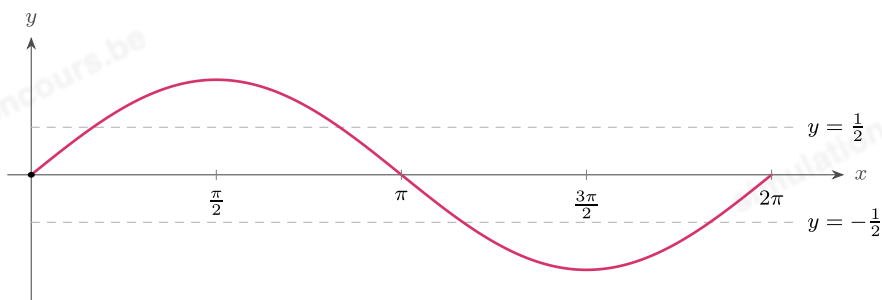
Montre que l'expression se ramène à $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$.

c)

Réduis au même dénominateur et utilise $1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$ pour conclure.

Exo 11 Lecture d'un graphe

La courbe représente $f(x) = \sin x$ sur $[0; 2\pi]$.



a)

La droite $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe. Traduis-le par une égalité entre $\sin(\frac{\pi}{2} - u)$ et $\sin(\frac{\pi}{2} + u)$, et relie-la aux familles complémentaires / anti-complémentaires.

b)

Le point $(\pi; 0)$ est un centre de symétrie. Traduis-le par une égalité entre $\sin(\pi + u)$ et $\sin(\pi - u)$.

c)

Lis les deux angles de $[0; 2\pi]$ dont le sinus vaut $\frac{1}{2}$, et justifie par les supplémentaires.

d)

Même question pour un sinus égal à $-\frac{1}{2}$.

Exo 12

Toutes les écritures de $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Détermine lesquelles de ces expressions valent $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Justifie chacune par la famille utilisée.

a)

$$\sin \frac{2\pi}{3}$$

b)

$$\cos \frac{5\pi}{6}$$

c)

$$-\cos \frac{7\pi}{6}$$

d)

$$\sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right)$$

e)

$$\cos \frac{11\pi}{6}$$

Exo 13

Un point mobile sur le cercle

Un point M parcourt le cercle unité : à l'instant t il est en $M_t = (\cos t; \sin t)$. On pose $A = M_{\pi/5}$.

a)

Donne les coordonnées du point B diamétralement opposé à A et l'instant $t_B \in [0; 2\pi[$ tel que $B = M_{t_B}$.

b)

Soit C le symétrique de A par rapport à l'axe Ox : coordonnées et instant t_C .

c)

Soit D le symétrique de A par rapport à l'axe Oy : coordonnées et instant t_D .

d)

Montre que A, B, C, D sont les sommets d'un rectangle, et précise pour quelle valeur de t (au lieu de $\frac{\pi}{5}$) ce rectangle serait un carré.

Exo 14 Réduire des angles « impossibles »

Sans calculatrice, en détaillant à chaque fois **(1)** le retrait des tours complets, **(2)** le quadrant et le signe, **(3)** l'angle de référence, calcule :

a)

$$\cos \frac{29\pi}{6} \text{ et } \sin \frac{29\pi}{6}.$$

b)

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{25\pi}{4}\right).$$

c)

$$\cos 1230^\circ.$$



DEUXIÈME PARTIE

Corrigés

Chaque exercice repris pas à pas, niveau par niveau.
Compare ta démarche, pas seulement ton résultat.





Une seconde – avant d'ouvrir le corrigé...



Si ce carnet t'aide, rends-nous la pareille : parle de simulationconcours.be à quelqu'un qui prépare le concours. C'est comme ça qu'on peut continuer.

Ce qu'on a préparé pour toi

- ✓ Ce carnet en interactif, avec correction en un clic
- ✓ Les cours complets, chapitre par chapitre — gratuits
- ✓ 3100 QCM type concours, corrigés et expliqués
- ✓ Des fiches de révision à imprimer

Tous les jeudis : simulation du concours en ligne

En conditions réelles — chrono, QCM type concours et score immédiat.



Rejoins-nous sur simulationconcours.be

scanne le QR ou tape l'adresse — puis reviens vérifier tes réponses

Les corrigés

FACILE 15 exercices

Exo 1 Opposés ($-\alpha$)

Symétrie par l'axe des cosinus : $\cos$ est *pair*, $\sin$ et tg sont *impaires*.

a)

► $\cos(-\alpha) = \cos \alpha.$

b)

► $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha.$

c)

► $\text{tg}(-\alpha) = -\text{tg} \alpha.$

d)

► $\sin(-\alpha) + \sin \alpha = -\sin \alpha + \sin \alpha = 0.$

Exo 2 Supplémentaires ($\pi - \alpha$)

Symétrie par l'axe des sinus : même $\sin$, $\cos$ et tg changent de signe.

a)

► $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha.$

b)

► $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha.$

c)

► $\text{tg}(\pi - \alpha) = -\text{tg} \alpha.$

d)

► $\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ (deux angles supplémentaires ont le même sinus).

Exo 3 Anti-supplémentaires ($\pi + \alpha$)

Symétrie centrale (par O) : $\cos$ et $\sin$ changent de signe, la tg est inchangée (période π).

a)

► $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha.$

b)

► $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha.$

c)

► $\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha.$

d)

► $\operatorname{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1.$

Exo 4 Complémentaires et anti-complémentaires ($\frac{\pi}{2} \pm \alpha$)

Autour de $\frac{\pi}{2}$, les fonctions sin et cos **s'échangent**.

a)

► $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$ (complémentaires).

b)

► $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ (complémentaires).

c)

► $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$ (anti-complémentaires).

d)

► $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$ (anti-complémentaires).

Exo 5 Reconnaître la nature de deux angles

On compare la somme (ou la différence) des deux angles à 90° , 180° , 0° .

a)

► $30^\circ + 150^\circ = 180^\circ$: **supplémentaires**.

b)

► $40^\circ + 50^\circ = 90^\circ$: **complémentaires**.

c)

► 70° et -70° sont **opposés** (somme nulle).

d)

► $200^\circ = 180^\circ + 20^\circ$: **anti-supplémentaires**.

Exo 6 Opposés : valeurs exactes

cos est pair, sin et tg sont impaires : le signe « — » sort (ou disparaît).

a)

► $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

b)

$$\blacktriangleright \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

c)

$$\blacktriangleright \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = -1.$$

d)

$$\blacktriangleright \cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

Exo 7 Supplémentaires : valeurs exactes

Symétrie par l'axe des sinus : même $\sin$, $\cos$ et tg changent de signe.

a)

$$\blacktriangleright \cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

b)

$$\blacktriangleright \sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

c)

$$\blacktriangleright \operatorname{tg} 120^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 60^\circ) = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}.$$

d)

$$\blacktriangleright \cos \frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Exo 8 Anti-supplémentaires : valeurs exactes

Symétrie centrale : $\cos$ et $\sin$ changent de signe, la tg est inchangée.

a)

$$\blacktriangleright \sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}.$$

b)

$$\blacktriangleright \cos 225^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

c)

$$\blacktriangleright \operatorname{tg} 240^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ + 60^\circ) = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}.$$

d)

$$\blacktriangleright \cos \frac{7\pi}{6} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exo 9 Complémentaires et anti-complémentaires : valeurs exactes

Autour de $\frac{\pi}{2}$, $\sin$ et $\cos$ s'échangent.

a)

► $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (complém.).

b)

► $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (complém.).

c)

► $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (anti-complém.).

d)

► $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ (anti-complém.).

Exo 10 Compléter une égalité de complémentaires

Deux angles complémentaires (somme 90° ou $\frac{\pi}{2}$) échangent $\sin$ et $\cos$; tg et cotg aussi.

a)

► $\cos 70^\circ = \sin(90^\circ - 70^\circ) = \sin 20^\circ$.

b)

► $\sin 25^\circ = \cos(90^\circ - 25^\circ) = \cos 65^\circ$.

c)

► $\text{tg } 40^\circ = \text{cotg}(90^\circ - 40^\circ) = \text{cotg } 50^\circ$.

d)

► $\cos \frac{\pi}{5} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \sin \frac{3\pi}{10}$.

Exo 11 Signe selon le quadrant

On repère le quadrant, puis on applique la règle des signes ($\cos > 0$ à droite, $\sin > 0$ en haut, $\text{tg} > 0$ aux quadrants I et III).

a)

► 200° : quadrant III, donc $\sin 200^\circ < 0$ (négatif).

b)

► 160° : quadrant II, donc $\cos 160^\circ < 0$ (négatif).

c)

► 300° : quadrant IV, donc $\text{tg } 300^\circ < 0$ (négatif).

d)

► $\cos(-40^\circ) = \cos 40^\circ$: quadrant I, donc (positif).

Exo 12 Trouver l'angle de référence

L'angle de référence est l'angle aigu formé avec l'axe horizontal.

a)

► $135^\circ = 180^\circ - 45^\circ$: référence $\beta = 45^\circ$ (supplémentaire).

b)

► $210^\circ = 180^\circ + 30^\circ$: référence $\beta = 30^\circ$ (anti-supplémentaire).

c)

► $330^\circ = 360^\circ - 30^\circ$: référence $\beta = 30^\circ$ (opposé, comme -30°).

d)

► $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$: référence $\beta = \frac{\pi}{3}$ (supplémentaire).

Exo 13 Lire une symétrie sur le cercle

55° et 125° sont symétriques par rapport à l'axe vertical (les points ont la même hauteur).

a)

► On passe de A à B par la **symétrie d'axe Oy** (l'axe des sinus).

b)

► $55^\circ + 125^\circ = 180^\circ$: ce sont des angles **supplémentaires**.

c)

► $\sin 125^\circ = \sin(180^\circ - 55^\circ) = \sin 55^\circ$: les sinus sont **égaux**.

d)

► $\cos 125^\circ = -\cos 55^\circ$: les cosinus sont **opposés**.

Exo 14 Même valeur qu'un angle aigu

On cherche l'angle aigu qui garde la même valeur du nombre trigonométrique.

a)

► $\sin 130^\circ = \sin(180^\circ - 50^\circ) = \sin 50^\circ$: $\beta = 50^\circ$ (supplém.).

b)

► $\cos 310^\circ = \cos(-50^\circ) = \cos 50^\circ$: $\beta = 50^\circ$ (opposés).

c)

► $\operatorname{tg} 200^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ + 20^\circ) = \operatorname{tg} 20^\circ$: $\beta = 20^\circ$ (anti-supplém.).

d)

► $\sin \frac{4\pi}{5} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \sin \frac{\pi}{5}$: $\beta = \frac{\pi}{5}$ (supplém.).

Exo 15 Nature et nombre conservé

Chaque symétrie conserve un nombre trigonométrique précis.

a)

► $50^\circ + 130^\circ = 180^\circ$: **supplémentaires** $\Rightarrow$ même sin ($\sin 130^\circ = \sin 50^\circ$).

b)

► $230^\circ - 50^\circ = 180^\circ$: **anti-supplémentaires** $\Rightarrow$ même tg ($\operatorname{tg} 230^\circ = \operatorname{tg} 50^\circ$).

c)

► 50° et -50° : **opposés** $\Rightarrow$ même cos ($\cos(-50^\circ) = \cos 50^\circ$).

d)

► $50^\circ + 40^\circ = 90^\circ$: **complémentaires** $\Rightarrow$ le sinus de l'un est le cosinus de l'autre ($\sin 50^\circ = \cos 40^\circ$).

MOYEN

15 exercices

Exo 1 Réduire, puis évaluer

a)

► $210^\circ = 180^\circ + 30^\circ$ (*anti-supplémentaires*): $\sin 210^\circ = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$.

b)

► $\cos(-120^\circ) = \cos 120^\circ$ (*opposés*); puis $120^\circ = 180^\circ - 60^\circ$ (*supplémentaires*): $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$.

c)

► $225^\circ = 180^\circ + 45^\circ$ (*anti-supplémentaires*): $\operatorname{tg} 225^\circ = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$.

d)

► $135^\circ = 180^\circ - 45^\circ$ (*supplémentaires*): $\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

e)

► $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$ (*supplémentaires*): $\sin \frac{5\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Exo 2 Simplifier une expression littérale

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$ (*anti-complém.*) et $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ (*supplém.*), donc la somme vaut $-\sin \alpha + \sin \alpha = 0$.
- $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ (*opposés*) et $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ (*anti-supplém.*), donc la somme vaut $-\sin \alpha - \sin \alpha = -2 \sin \alpha$.
- $\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$ (*anti-supplém.*) et $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$ (*opposés*), donc $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{-\operatorname{tg} \alpha} = -1$.

- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ (supplém.) et $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ (opposés), donc $-\cos \alpha + \cos \alpha = 0$.

Exo 3 Lesquelles valent $\sin 5^\circ$?

On ramène chaque expression à $\sin 5^\circ$ ou $-\sin 5^\circ$.

a)

► $\sin 175^\circ = \sin(180^\circ - 5^\circ) = \sin 5^\circ$ (supplém.). **Oui.**

b)

► $-\cos 95^\circ = -\cos(90^\circ + 5^\circ) = -(-\sin 5^\circ) = \sin 5^\circ$ (anti-complém.). **Oui.**

c)

► $\sin(-5^\circ) = -\sin 5^\circ$ (opposés). **Non.**

d)

► $-\sin 185^\circ = -\sin(180^\circ + 5^\circ) = -(-\sin 5^\circ) = \sin 5^\circ$ (anti-supplém.). **Oui.**

e)

► $\cos(-85^\circ) = \cos 85^\circ = \cos(90^\circ - 5^\circ) = \sin 5^\circ$ (opposés puis complém.). **Oui.**

Bilan : (a), (b), (d) et (e) valent $\sin 5^\circ$; seule (c) est différente.

Exo 4 Lesquelles valent $\operatorname{tg} 10^\circ$?

a)

► $\operatorname{tg} 190^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ + 10^\circ) = \operatorname{tg} 10^\circ$ (anti-supplém., période π). **Oui.**

b)

► $\cotg 80^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ - 80^\circ) = \operatorname{tg} 10^\circ$ (complém. : $\cotg \alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$). **Oui.**

c)

► $\operatorname{tg} 170^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 10^\circ) = -\operatorname{tg} 10^\circ$ (supplém.). **Non.**

d)

► $-\operatorname{tg}(-10^\circ) = -(-\operatorname{tg} 10^\circ) = \operatorname{tg} 10^\circ$ (opposés). **Oui.**

Bilan : (a), (b) et (d) ; (c) vaut $-\operatorname{tg} 10^\circ$.

Exo 5 Vrai ou Faux

a)

► **Faux** : $5^\circ + 175^\circ = 180^\circ$, ils sont *supplémentaires* (anti-supplémentaires signifierait une différence de 180°).

b)

► **Vrai** : $5^\circ + 85^\circ = 90^\circ$, ce sont des complémentaires.

c)

► **Vrai** : $\cos 100^\circ = \cos(90^\circ + 10^\circ) = -\sin 10^\circ$ (*anti-complém.*).

d)

► **Faux** : $250^\circ = 180^\circ + 70^\circ$, donc $\sin 250^\circ = -\sin 70^\circ$ (*anti-supplém.*), et non $+\sin 70^\circ$.

Exo 6 Réduire puis évaluer (angles négatifs ou $> 360^\circ$)

a)

► $\cos(-135^\circ) = \cos 135^\circ$ (*opposés*) $= \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b)

► $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$ (*anti-supplém.*) : $\sin \frac{7\pi}{6} = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.

c)

► $\frac{5\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$, donc $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{3} = \operatorname{tg}(-\frac{\pi}{3}) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$ (*opposés*).

d)

► $420^\circ = 360^\circ + 60^\circ$ (*un tour*) : $\cos 420^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

e)

► $\sin(-\frac{3\pi}{4}) = -\sin \frac{3\pi}{4} = -\sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exo 7 Simplifier une expression littérale

- ► $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ et $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$, donc la somme vaut $-2 \cos \alpha$.
- ► $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha$ et $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$, donc $\cos \alpha - (-\cos \alpha) = 2 \cos \alpha$.
- ► $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$ et $\operatorname{cotg}(\pi + \alpha) = \operatorname{cotg} \alpha$, donc $-\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha = -\operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -1$.
- ► $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ et $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha$, donc $\frac{-\sin \alpha}{-\sin \alpha} = 1$.

Exo 8 Des expressions indépendantes de α

a)

► $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$; $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$, $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$. D'où $\cos^2 \alpha + (-\sin \alpha)(-\sin \alpha) = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$.

b)

► $\cos(\pi + \alpha) \cos(-\alpha) = (-\cos \alpha)(\cos \alpha) = -\cos^2 \alpha$; et $\sin(\pi - \alpha) \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha \cdot \sin \alpha = \sin^2 \alpha$. D'où $-\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = -1$.

c)

► $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha$ et $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$, donc $-\sin \alpha + \sin \alpha = 0$.

Exo 9 Lesquelles valent $\cos 40^\circ$?

On ramène chaque expression à $\cos 40^\circ$ ou $-\cos 40^\circ$.

a)

► $\cos(-40^\circ) = \cos 40^\circ$ (opposés). **Oui.**

b)

► $\sin 130^\circ = \sin(180^\circ - 130^\circ) = \sin 50^\circ = \cos 40^\circ$ (supplém. puis complém.). **Oui.**

c)

► $\cos 220^\circ = \cos(180^\circ + 40^\circ) = -\cos 40^\circ$ (anti-supplém.). **Non.**

d)

► $-\cos 140^\circ = -\cos(180^\circ - 40^\circ) = -(-\cos 40^\circ) = \cos 40^\circ$ (supplém.). **Oui.**

e)

► $\sin(-50^\circ) = -\sin 50^\circ = -\cos 40^\circ$ (opposés puis complém.). **Non.**

Bilan : (a), (b) et (d) valent $\cos 40^\circ$; (c) et (e) valent $-\cos 40^\circ$.

Exo 10 Vrai ou Faux (valeurs exactes)

a)

► **Vrai** : $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(-60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b)

► **Faux** : $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} = \operatorname{tg}(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$, alors que $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

c)

► **Vrai** : $\cos 80^\circ = \sin 10^\circ$ (complém.) et $\sin 170^\circ = \sin(180^\circ - 10^\circ) = \sin 10^\circ$ (supplém.).

d)

► **Faux** : $\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, alors que $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exo 11 Utiliser une donnée

On garde $\cos \alpha = \frac{3}{5}$; aucune de ces réponses n'a besoin de $\sin \alpha$.

a)

► $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ (supplém.).

b)

► $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha = \frac{3}{5}$ (anti-complém.).

c)

► $\cos(2\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos \alpha = \frac{3}{5}$ (tour puis opposés).

d)

► $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ (opposés puis complém.).

Exo 12 Lire une réduction sur le cercle

a)

► $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$: il est associé à 30° par la **symétrie d'axe Oy** (supplémentaires).

b)

► $\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

c)

► Même sinus : 30° (car 30° et 150° sont supplémentaires).

d)

► Même cosinus : 210° (car $\cos 210^\circ = \cos(-150^\circ) = \cos 150^\circ$, angles opposés).

Exo 13 Résoudre à l'aide des angles associés

a)

► Même sinus : $x = 40^\circ$ ou son supplémentaire $x = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$.

b)

► Même cosinus : $x = 50^\circ$ ou son opposé $x = 360^\circ - 50^\circ = 310^\circ$.

c)

► $-\cos 50^\circ = \cos 130^\circ$, donc $x = 130^\circ$ ou $x = 360^\circ - 130^\circ = 230^\circ$.

d)

► $-\sin 40^\circ = \sin(180^\circ + 40^\circ)$, donc $x = 220^\circ$ ou $x = 360^\circ - 40^\circ = 320^\circ$.

Exo 14 Tangente et cotangente : valeurs exactes

a)

► $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{6} = \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ (supplém.).

b)

► $\cotg \frac{2\pi}{3} = \cotg\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cotg \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ (supplém.).

c)

► $\tg \frac{7\pi}{4} = \tg\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tg \frac{\pi}{4} = -1$ (opposés).

d)

► $\cotg \frac{5\pi}{4} = \cotg\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cotg \frac{\pi}{4} = 1$ (anti-supplém., période π).

Exo 15 Chaîner plusieurs symétries

- $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$, $\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$, $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$, donc $\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{-\cos \alpha} = -\sin \alpha$.
- $\cos \alpha + (-\cos \alpha) + (-\sin \alpha) + (-\sin \alpha) = -2 \sin \alpha$.
- $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ et $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$: le numérateur vaut 0, donc l'expression vaut 0.

DIFFICILE 14 exercices

Exo 1 Un angle, deux chemins

a)

► $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$ (supplémentaires), donc $\cos \frac{5\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b)

► $\frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$ (anti-complémentaires), donc $\cos \frac{5\pi}{6} = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c)

► Les deux méthodes donnent $-\frac{\sqrt{3}}{2}$: elles **coïncident**. C'est normal, $\pi - \frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$ sont le même angle.

d)

► Supplémentaires : $\sin \frac{5\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Anti-complémentaires : $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Même résultat : $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Exo 2 Prouver une simplification

a)

► $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ (supplém.) et $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ (anti-supplém.), donc $A = \sin \alpha - \sin \alpha = 0$.

b)

► $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ (anti-supplém.) et $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ (opposés), donc $B = -\cos \alpha - \cos \alpha = -2 \cos \alpha$.

c)

► $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$ (supplém.) et $\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$ (anti-supplém.), donc $C = -\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha = 0$.

d)

► $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$ (anti-complém.) et $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ (supplém.), donc $D = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ (identité fondamentale).

Exo 3 Quatre points associés

a)

► En appliquant les familles à $M = (a; b) = (\cos \alpha; \sin \alpha)$:

$$N(\pi - \alpha) = (-a; b), \quad P(-\alpha) = (a; -b), \quad Q(\pi + \alpha) = (-a; -b).$$

b)

► Même **ordonnée** (même $\sin$): M et N (ordonnée b); P et Q (ordonnée $-b$). Même **abscisse** (même $\cos$): M et P (abscisse a); N et Q (abscisse $-a$).

c)

► $M = (a; b)$ et $Q = (-a; -b)$ sont opposés coordonnée par coordonnée: ils sont **symétriques par rapport au centre O** (anti-supplémentaires).

d)

► Pour $\alpha = \frac{\pi}{6}$: $a = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. D'où

$$M = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right), \quad N = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right), \quad P = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right), \quad Q = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

Exo 4 Toutes les écritures d'un même nombre

On ramène chaque expression à une valeur remarquable.

a)

► $\sin \frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ (supplém.). **Oui.**

b)

► $\cos \frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ (supplém.). **Non** (vaut $-\frac{1}{2}$).

c)

► $-\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -(-\sin \frac{\pi}{6}) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ (opposés). **Oui.**

d)

► $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ (*anti-complém.*). **Oui.**

e)

► $-\cos \frac{2\pi}{3} = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ (*supplém.*). **Oui.**

Bilan : (a), (c), (d) et (e) valent $\frac{1}{2}$; seule (b) vaut $-\frac{1}{2}$.

Exo 5 Une somme qui s'effondre

a)

► Deux angles différant de 180° ont des cosinus opposés (*anti-supplém.*). Ainsi $\cos 0^\circ + \cos 180^\circ = 1 + (-1) = 0$; $\cos 60^\circ + \cos 240^\circ = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$; $\cos 120^\circ + \cos 300^\circ = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$.

b)

► La somme des trois paires vaut $S = 0 + 0 + 0 = 0$.

c)

► Les six sommets de l'hexagone se répartissent en trois paires diamétralement opposées (symétriques par rapport au centre O) : les abscisses (comme les vecteurs positions) s'annulent deux à deux. Le centre O est le barycentre des sommets, donc la somme est nulle.

Exo 6 Une identité indépendante de α

a)

► $\cos^2 \alpha$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ donne $\sin^2 \alpha$; $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ donne $\cos^2 \alpha$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$ donne $\sin^2 \alpha$.

b)

► La somme vaut $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = 2 \cdot 1 = 2$, indépendante de α .

c)

► Pour $\alpha = \frac{\pi}{6}$: $\cos^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{3} + \cos^2 \frac{5\pi}{6} + \cos^2 \frac{2\pi}{3} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 2$. Cohérent.

Exo 7 Deux fonctions, une équation

a)

► $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ (*anti-complém.*) et $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ (*parité + complém.*).
Donc $f(x) = -\sin x + \sin x = 0$.

b)

► $\sin(\pi - x) = \sin x$ (*supplém.*) et $\sin(\pi + x) = -\sin x$ (*anti-supplém.*). Donc $g(x) = \sin x - (-\sin x) = 2 \sin x$.

c)

► $f(x) = g(x) \iff 0 = 2 \sin x \iff \sin x = 0$. Sur $[0; 2\pi[: x = 0$ ou $x = \pi$.

Exo 8 Symétrie par la première bissectrice

a)

► La symétrie par $y = x$ associe α à son **complémentaire** $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

b)

► Cette symétrie échange abscisse et ordonnée : $M' = (\sin \alpha ; \cos \alpha)$.

c)

► M'' (symétrie d'axe Oy) correspond au **supplémentaire** $\pi - \alpha$, de coordonnées $(-\cos \alpha ; \sin \alpha)$.

d)

► Ordonnée de M' : $\cos \alpha$; ordonnée de M'' : $\sin \alpha$. Elles sont égales $\iff \cos \alpha = \sin \alpha \iff \operatorname{tg} \alpha = 1$, soit $\alpha = \frac{\pi}{4}$ sur $]0; \frac{\pi}{2}[$.

Exo 9 Le rôle d'un entier n

a)

► Si n est *pair*, $n\pi$ est un multiple de 2π à un tour près : $\cos(n\pi + \alpha) = \cos \alpha$. Si n est *impair*, $n\pi = (n - 1)\pi + \pi$ et $\cos(n\pi + \alpha) = \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ (*anti-supplém.*). Les deux cas se résument en $\cos(n\pi + \alpha) = (-1)^n \cos \alpha$.

b)

► De même $\sin(n\pi - \alpha)$ vaut $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ si n pair, et $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ si n impair, d'où $\sin(n\pi - \alpha) = (-1)^{n+1} \sin \alpha = -(-1)^n \sin \alpha$.

c)

► Ajouter π ne change pas la tangente (*anti-supplém., période π*) ; en ajoutant n fois π on retrouve toujours $\operatorname{tg}(n\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$.

d)

► $\cos(7\pi + \frac{\pi}{3}) = (-1)^7 \cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$; $\operatorname{tg}(100\pi + \frac{\pi}{4}) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$.

Exo 10 Prouver une identité fractionnaire

a)

► $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$; $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ donc $1 + \cos(\pi + \alpha) = 1 - \cos \alpha$. $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$; $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ donc $1 + \cos(-\alpha) = 1 + \cos \alpha$.

b)

► L'expression devient $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} + \frac{-\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$.

c)

► Au même dénominateur $(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha) = 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$:

$$\frac{\sin \alpha(1 + \cos \alpha) - \sin \alpha(1 - \cos \alpha)}{\sin^2 \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{2 \cos \alpha}{\sin \alpha} = 2 \cotg \alpha.$$

Valable pour $\sin \alpha \neq 0$ et $\cos \alpha \neq 1$, c'est-à-dire $\alpha \neq k\pi$.

Exo 11 Lecture d'un graphe

a)

► L'axe $x = \frac{\pi}{2}$ donne $\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + u\right)$. En effet $\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos u$ (*complém.*) et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + u\right) = \cos u$ (*anti-complém.*) : les deux valent $\cos u$.

b)

► Le centre $(\pi ; 0)$ donne $\sin(\pi + u) = -\sin(\pi - u)$. Comme $\sin(\pi - u) = \sin u$, on retrouve $\sin(\pi + u) = -\sin u$ (*anti-supplém.*).

c)

► $\sin x = \frac{1}{2}$ sur $[0; 2\pi]$: $x = \frac{\pi}{6}$ et $x = \frac{5\pi}{6}$ (angles supplémentaires, même sinus).

d)

► $\sin x = -\frac{1}{2}$: $x = \frac{7\pi}{6}$ et $x = \frac{11\pi}{6}$, images de $\frac{\pi}{6}$ par $\pi + \frac{\pi}{6}$ (*anti-supplém.*) et $2\pi - \frac{\pi}{6}$ (*opposé*).

Exo 12 Toutes les écritures de $\frac{\sqrt{3}}{2}$

a)

► $\sin \frac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (*supplém.*). **Oui.**

b)

► $\cos \frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (*supplém.*). **Non.**

c)

► $-\cos \frac{7\pi}{6} = -\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -(-\cos \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (*anti-supplém.*). **Oui.**

d)

► $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (*opposés*). **Non.**

e)

► $\cos \frac{11\pi}{6} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (*opposé / tour*). **Oui.**

Bilan : (a), (c) et (e) valent $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (b) et (d) valent $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exo 13 Un point mobile sur le cercle

On note $x = \cos \frac{\pi}{5}$ et $y = \sin \frac{\pi}{5}$, de sorte que $A = (x; y)$.

a)

► $B = -A = (-x; -y) = (\cos(\pi + \frac{\pi}{5}); \sin(\pi + \frac{\pi}{5}))$, donc $t_B = \pi + \frac{\pi}{5} = \frac{6\pi}{5}$ (anti-supplém.).

b)

► $C = (x; -y) = (\cos(-\frac{\pi}{5}); \sin(-\frac{\pi}{5}))$, donc $t_C = 2\pi - \frac{\pi}{5} = \frac{9\pi}{5}$ (opposé).

c)

► $D = (-x; y) = (\cos(\pi - \frac{\pi}{5}); \sin(\pi - \frac{\pi}{5}))$, donc $t_D = \pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$ (supplém.).

d)

► Les quatre points sont $(\pm x; \pm y)$: symétriques par rapport aux deux axes, ils forment un rectangle de côtés $2x$ et $2y$ parallèles aux axes. C'est un carré $\iff 2x = 2y \iff \cos t = \sin t \iff t = \frac{\pi}{4}$.

Comme $\frac{\pi}{5} \neq \frac{\pi}{4}$, ce n'est pas un carré ici.

Exo 14 Réduire des angles « impossibles »

a)

► (1) $\frac{29\pi}{6} - 2 \cdot 2\pi = \frac{29\pi}{6} - \frac{24\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$. (2) $\frac{5\pi}{6}$ est au quadrant II ($\cos < 0, \sin > 0$). (3) référence $\frac{\pi}{6}$ car $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$. D'où $\cos \frac{29\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \frac{29\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

b)

► (1) $-\frac{25\pi}{4} + 4 \cdot 2\pi = -\frac{25\pi}{4} + \frac{32\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$. (2) quadrant IV ($\text{tg} < 0$). (3) référence $\frac{\pi}{4}$ car $\frac{7\pi}{4} = 2\pi - \frac{\pi}{4}$. D'où $\text{tg}(-\frac{25\pi}{4}) = \text{tg} \frac{7\pi}{4} = -\text{tg} \frac{\pi}{4} = -1$.

c)

► (1) $1230^\circ - 3 \cdot 360^\circ = 1230^\circ - 1080^\circ = 150^\circ$. (2) quadrant II ($\cos < 0$). (3) référence 30° car $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$. D'où $\cos 1230^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Tous les exos cochés ? Passe au niveau réel.

+

Ce carnet est un extrait de notre bibliothèque d'entraînement — la suite se joue en ligne.

Sur simulationconcours.be

- ✓ Le même carnet en interactif, avec correction en un clic
- ✓ Les autres mécaniques de la fiche, niveau par niveau
- ✓ 3100 QCM type concours, corrigés et expliqués
- ✓ Les cours complets — gratuits — et les fiches de révision

Tous les jeudis : simulation du concours en ligne

En conditions réelles — chrono, QCM type concours et score immédiat.



Rejoins-nous sur simulationconcours.be

scanne le QR ou tape l'adresse — les cours complets sont gratuits