



Mathématiques

Cours · Fiche 5

Dérivation

9 sections

27 min de lecture

Accès libre

Ce que tu sauras faire

- ✓ définir le **nombre dérivé** d'une fonction en un point comme limite du **taux d'accroissement** ;
- ✓ interpréter ce nombre dérivé comme la **pente de la tangente** et comme une **vitesse instantanée** ;
- ✓ connaître et appliquer les **17 formules de dérivation** (puissances, produit, quotient, fonctions composées, trigonométriques, logarithmes, exponentielles) ;
- ✓ utiliser le signe de la **dérivée première f'** pour étudier la croissance et trouver les **extremums** ;
- ✓ utiliser le signe de la **dérivée seconde f''** pour étudier la **concavité** et les **points d'inflexion** ;
- ✓ écrire l'**équation de la tangente** à une courbe en un point donné.



simulationconcours.be

scanne & continue en ligne

Sommaire

- 1 Introduction : à quoi sert la dérivation ?
- 2 Le nombre dérivé et la fonction dérivée
- 3 Le formulaire de dérivation
- 4 Propriétés de la dérivée première : variations et extremums
- 5 Propriétés de la dérivée seconde : concavité et inflexion
- 6 L'équation de la tangente
- 7 Lire un graphique : relier f , f' et f''
- 8 Étude de fonction complète : mettre tous les outils ensemble
- 9 Synthèse

1 Introduction : à quoi sert la dérivation ?

La **dérivation** est l'un des outils les plus puissants des mathématiques. Elle répond à une question apparemment simple mais centrale : *à quelle vitesse une grandeur varie-t-elle à un instant précis ?*

Considérons une voiture dont la position évolue dans le temps. On sait calculer sa **vitesse moyenne** : il suffit de diviser la distance parcourue par la durée du trajet. Mais comment connaître la vitesse affichée par le compteur *à un instant exact*, par exemple à 3 s pile ? C'est précisément ce que permet la dérivation : passer d'une variation *moyenne* (entre deux instants) à une variation *instantanée* (en un seul point), grâce à l'idée de **limite**.

Géométriquement, le même outil répond à une autre question : *quelle est l'inclinaison exacte d'une courbe en un point donné ?* La réponse est la **pente de la tangente**, et nous verrons qu'elle coïncide exactement avec le nombre dérivé.

REMARQUE

La dérivation se construit en trois temps que ce cours suit dans l'ordre :

- 1 **le nombre dérivé en un point** (section 2) : la définition fondatrice ;
- 2 **les formules de dérivation** (section 3) : pour dériver sans recalculer de limite à chaque fois ;
- 3 **les propriétés des dérivées** (sections 4, 5, 6) : ce que f' et f'' nous apprennent sur la fonction f (variations, extremums, concavité, tangente).

2 Le nombre dérivé et la fonction dérivée

Le taux d'accroissement (variation moyenne)

Avant de parler de variation instantanée, il faut parler de variation *moyenne* entre deux points. C'est le rôle du taux d'accroissement.

DÉFINITION 2.1 Taux d'accroissement de f entre x_0 et $x_0 + h$

Soit f une fonction et x_0 un point de son domaine. Pour un petit écart $h \neq 0$, le **taux d'accroissement** (ou taux de variation moyen) de f entre x_0 et $x_0 + h$ est le quotient

$$\tau(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Décortiquons ce quotient, terme par terme :

où :

- $f(x_0 + h) - f(x_0)$: la **variation de la sortie** (de l'ordonnée y), c'est-à-dire de combien la fonction a augmenté ou diminué. Unité : celle de y (par exemple des mètres en cinématique) ;
- $h = (x_0 + h) - x_0$: la **variation de l'entrée** (de l'abscisse x), l'écart entre les deux points. Unité : celle de x (par exemple des secondes) ;
- $\tau(h)$: le rapport des deux, soit la variation de y *par unité* de variation de x . Son unité est donc $[y]/[x]$ (par exemple des).

Géométriquement, $\tau(h)$ est la **pente de la sécante** qui joint les deux points $A(x_0, f(x_0))$ et $B(x_0 + h, f(x_0 + h))$ de la courbe.

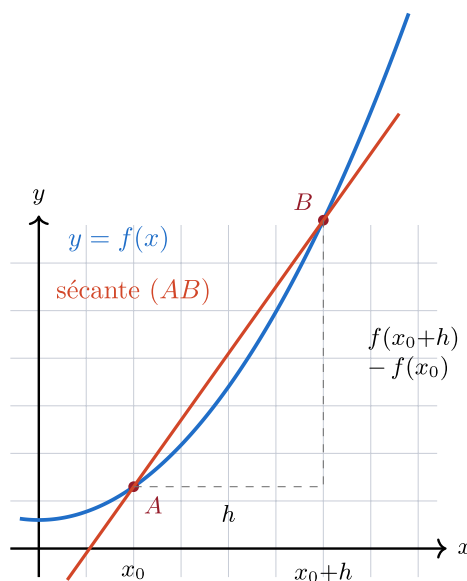


Figure 1 : le taux d'accroissement est la pente de la sécante (AB) . Le triangle « horizontal h , vertical $f(x_0 + h) - f(x_0)$ » donne directement $\tau(h)$.

Le nombre dérivé (variation instantanée)

Faisons maintenant tendre h vers 0 : le point B glisse sur la courbe et se rapproche de A . La sécante (AB) pivote autour de A et tend vers une position limite : la **tangente**. La pente de cette tangente est le **nombre dérivé**.

DÉFINITION 2.2 Fonction dérivable en un point — nombre dérivé

On suppose que la fonction f est continue au point $x = x_0$. On dit que f est **dérivable au point** $x = x_0$ si le taux d'accroissement de f au point x_0 admet une **limite réelle** lorsque h tend vers zéro. Cette limite est appelée **nombre dérivé** de f en x_0 et se note $f'(x_0)$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

où :

- x_0 : le **point** où l'on calcule la dérivée (une abscisse fixée) ;
- h : l'écart qui tend vers 0 — c'est le cœur du passage « moyen $\rightarrow$ instantané » ;
- $f'(x_0)$: le **nombre dérivé**, valeur unique qui mesure la variation instantanée de f en x_0 . C'est un *nombre*, pas une fonction. Son unité est $[y]/[x]$;
- « limite réelle » : la limite doit exister et être un nombre fini. Si elle n'existe pas (ou vaut $\pm\infty$), f n'est pas dérivable en x_0 .

REMARQUE Une autre écriture, utile pour la tangente

En posant $x = x_0 + h$ (donc $h = x - x_0$, et $h \rightarrow 0 \Leftrightarrow x \rightarrow x_0$), la même définition s'écrit

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Cette forme « avec x » est celle qu'on retrouvera pour l'équation de la tangente (section 6).

Interprétation géométrique : la pente de la tangente

✓ PROPRIÉTÉ 2.1 Nombre dérivé = pente de la tangente

Si f est dérivable en x_0 , alors la courbe de f admet au point $P_0(x_0, f(x_0))$ une **tangente** dont le **coefficient angulaire** (la pente) est exactement $f'(x_0)$.

C'est l'image à retenir : la tangente est la « position limite » des sécantes lorsque le second point se rapproche du premier.

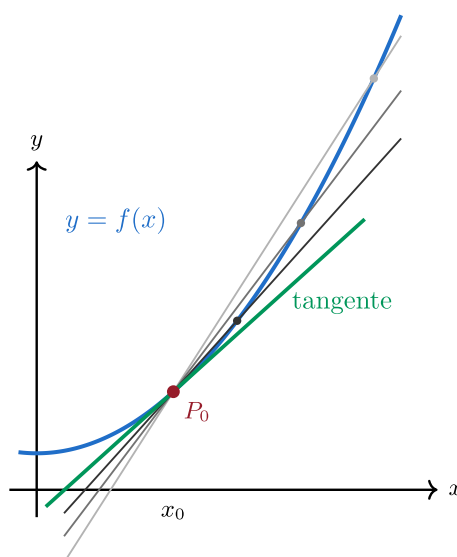


Figure 2 : quand $h \rightarrow 0$, les sécantes (en gris) pivotent vers la **tangente** (en vert). Sa pente est $f'(x_0)$.

Interprétation cinématique : la vitesse instantanée

En physique, si $f(x)$ donne la **position** d'un mobile en fonction du temps x , alors :

- le taux d'accroissement $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ est la **vitesse moyenne** entre les instants x_0 et $x_0 + h$;
- le nombre dérivé $f'(x_0)$ est la **vitesse instantanée** à l'instant x_0 .

Détaillons l'exemple fondateur du livre, celui d'un mobile en mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA).

🔗 EXEMPLE Vitesse instantanée d'un mobile en MRUA

On considère la trajectoire d'un mobile en MRUA d'équation horaire

$$y = f(x) = \frac{1}{2} x^2,$$

avec une accélération $a = 1 \text{ m/s}^2$, x le temps en secondes et une vitesse initiale $v_0 = 0 \text{ m/s}$.
On cherche la dérivée $f'(x_0)$, c'est-à-dire la vitesse instantanée à l'instant x_0 .

Étape 1 — écrire le taux d'accroissement.

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(x_0 + h)^2 - \frac{1}{2}(x_0)^2}{h}.$$

Étape 2 — développer le numérateur. Comme $(x_0 + h)^2 = x_0^2 + 2x_0h + h^2$,

$$\frac{1}{2}(x_0 + h)^2 - \frac{1}{2}x_0^2 = \frac{1}{2}(x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2) = \frac{1}{2}(2x_0h + h^2).$$

Étape 3 — simplifier par h (licite car $h \neq 0$ tant que la limite n'est pas prise) :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(2x_0h + h^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}h(2x_0 + h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x_0 + h}{2}.$$

Étape 4 — faire tendre h vers 0. Le terme h disparaît :

$$f'(x_0) = \frac{2x_0 + 0}{2} = x_0.$$

Conclusion. D'où $f'(x_0) = x_0$. Cela donne directement la vitesse instantanée à chaque instant :

- pour $x_0 = 3 \Rightarrow f'(x_0) = 3$: la vitesse instantanée vaut **3 m/s** à l'instant **3 s** ;
- pour $x_0 = 4 \Rightarrow f'(x_0) = 4$: la vitesse instantanée vaut **4 m/s** à l'instant **4 s**.

Vérification par l'accélération. Avec ces deux vitesses instantanées, on retrouve bien

$$a = 1 \text{ m/s}^2 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{4 - 3}{1}.$$

On constate donc que pour $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, on a $f'(x) = x$: la dérivée transforme la loi de position en loi de vitesse.

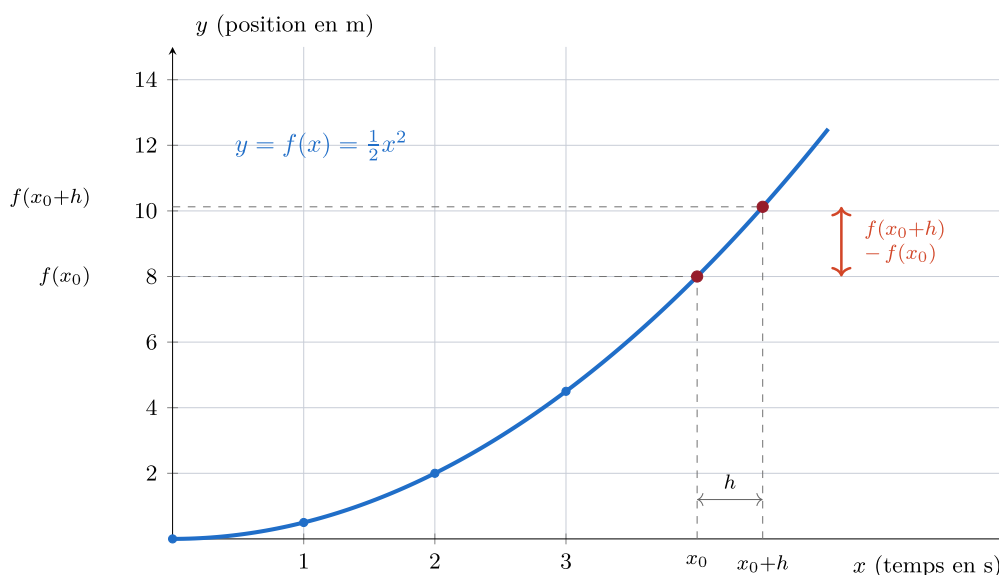


Figure 3 : la parabole de position $y = \frac{1}{2}x^2$. Le rapport $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ tend vers la pente de la tangente, qui vaut x_0 (la vitesse instantanée).

De la dérivée en un point à la fonction dérivée

Dans l'exemple précédent, on a trouvé que $f'(x_0) = x_0$ *quel que soit* le point x_0 choisi. Autrement dit, à chaque abscisse x on peut associer le nombre dérivé en ce point : cela définit une **nouvelle fonction**, la **fonction dérivée**, notée f' .

📖 DÉFINITION 2.3 Fonction dérivée

Lorsque f est dérivable en tout point d'un intervalle I , la **fonction dérivée** de f est la fonction

$$f' : x \mapsto f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

qui à chaque x de I associe le nombre dérivé de f en ce point.

⚠️ ATTENTION Ne pas confondre $f'(x_0)$ et f'

$f'(x_0)$ est un **nombre** (le nombre dérivé en un point précis x_0) ; f' est une **fonction** (la fonction dérivée). On obtient le premier en évaluant la seconde en x_0 .

REMARQUE *Dérivabilité et continuité*

Si une fonction est **dérivable** en x_0 , alors elle y est nécessairement **continue**. La réciproque est fautive : une fonction peut être continue sans être dérivable (par exemple en un point « anguleux » comme le sommet de $|x|$ en 0, où la tangente n'est pas définie de manière unique). C'est pourquoi la définition commence par supposer f continue en x_0 .

3 Le formulaire de dérivation

Calculer une dérivée à partir de la limite du taux d'accroissement est long et fastidieux. Heureusement, une fois la dérivée des fonctions de base établie (par la définition), on dispose de **règles** qui permettent de dériver presque toutes les fonctions usuelles *sans recalculer de limite*.

Dans tout ce qui suit, on adopte les conventions du livre :

où :

- a : une **constante** non nulle et positive ;
- C : une **constante** quelconque ;
- U et V : des **fonctions** de la variable x ;
- x : la **variable indépendante** ;
- U', V' : les dérivées de U et V . La dérivée de $U(V)$ se note $U'(V')$.

Les dérivées de référence

FORMULE 3.1 *Dérivée d'une constante*

$$C' = 0 \quad (C \text{ est une constante}).$$

Interprétation. Une fonction constante est une droite horizontale : sa pente est nulle partout, donc sa dérivée est nulle. Exemple : si $y = 3$, alors $y' = 0$.

FORMULE 3.2 *Dérivée de la variable*

$$x' = 1.$$

Interprétation. La fonction $y = x$ est la première bissectrice, droite de pente 1 ; sa dérivée vaut donc 1. Exemple : si $y = 2x$, alors $y' = 2$ (la pente de la droite $y = 2x$).

Σ FORMULE 3.3 Dérivée d'une puissance (forme composée)

$$(U^n)' = n \times U^{n-1} \times U'.$$

où :

- U : une fonction de x ;
- n : l'exposant (entier, fractionnaire, positif ou négatif) ;
- U' : la dérivée de la fonction U — c'est le facteur qui « vient de l'intérieur » (règle de la chaîne).

Cas particulier essentiel. Si $U = x$ (donc $U' = 1$), on retrouve $(x^n)' = n x^{n-1}$. Cette formule fonctionne aussi avec des **racines** et des **exposants négatifs**, à condition de réécrire la racine sous forme de puissance : $\sqrt[n]{x^p} = x^{p/n}$.

🔗 EXEMPLE La puissance sous toutes ses formes

- **Puissance entière** : $y = x^4 \Rightarrow y' = 4 \times x^3 \times x' = 4x^3 \times 1 = 4x^3$.
- **Racine cubique** : on écrit $y = \sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$, puis $y' = \frac{2}{3} x^{2/3-1} x' = \frac{2}{3} x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.
- **Racine carrée** : on écrit $y = \sqrt{x} = x^{1/2}$, puis $y' = \frac{1}{2} x^{1/2-1} x' = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
- **Forme générale** : $y = \sqrt[n]{x^p} = x^{p/n} \Rightarrow y' = \frac{p}{n} x^{\frac{p}{n}-1} = \dots$

🔗 COMMENT FAIRE Dériver une racine ou un exposant négatif

- 1 **Réécrire** la racine en puissance : $\sqrt{x} = x^{1/2}$, $\sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$, $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$.
- 2 **Appliquer** $(x^n)' = n x^{n-1}$: on descend l'exposant devant et on retire 1 à l'exposant.
- 3 **Revenir** si besoin à la notation racine ($x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$) pour présenter un résultat « propre ».

Les règles opératoires

Σ FORMULE 3.4 Dérivée d'une somme

$$(U + V)' = U' + V'.$$

Interprétation. La dérivée d'une somme est la somme des dérivées : on dérive chaque terme séparément. (De même, $(U - V)' = U' - V'$, et $(aU)' = aU'$: une constante multiplicative « sort » de la dérivée.)

 EXEMPLE Somme d'une puissance et d'une racine

Soit $y = x^2 + \sqrt[3]{x}$. On dérive terme à terme :

$$y' = (x^2)' + (\sqrt[3]{x})' = 2x + \frac{1}{3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

 FORMULE 3.5 Dérivée d'un produit

$$(U \times V)' = U' \times V + U \times V'.$$

où :

- $U' \times V$: on dérive le premier facteur, on garde le second ;
- $U \times V'$: on garde le premier facteur, on dérive le second ;
- on **additionne** les deux. **Attention :** $(UV)' \neq U'V'$ (erreur classique !).

 EXEMPLE Dérivée d'un produit

Soit $y = x \times \sqrt{x+1}$. Posons $U = x$ et $V = \sqrt{x+1}$. Alors $U' = 1$ et $V' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ (racine d'une fonction composée). D'où

$$y' = \underbrace{(x)'}_{U'} \times (\sqrt{x+1}) + x \times \underbrace{(\sqrt{x+1})'}_{V'} = 1 \times (\sqrt{x+1}) + x \times \frac{1}{2\sqrt{x+1}}.$$

 FORMULE 3.6 Dérivée d'un quotient

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' \times V - U \times V'}{V^2}.$$

où :

- au numérateur : « **dérivée du haut** $\times$ **bas** $-$ **haut** $\times$ **dérivée du bas** » (l'ordre compte, à cause du signe $-$) ;

- au dénominateur : le **carré du dénominateur** V^2 ;
- la formule n'est valable que là où $V \neq 0$.

❓ EXEMPLE Dérivée d'un quotient

Soit $y = \frac{x^2}{1+x^4}$. Posons $U = x^2$ (donc $U' = 2x$) et $V = 1 + x^4$ (donc $V' = 4x^3$). Alors

$$y' = \frac{(x^2)' \times (1 + x^4) - x^2 \times (1 + x^4)'}{(1 + x^4)^2} = \frac{2x \times (1 + x^4) - x^2 \times (4x^3)}{(1 + x^4)^2}.$$

☞ COMMENT FAIRE Dériver un quotient U/V sans se tromper de signe

- 1 **Identifier** le haut U et le bas V , puis calculer à part U' et V' .
- 2 **Écrire** le numérateur dans le bon ordre : $U'V - UV'$ (jamais $UV' - U'V$).
- 3 **Mettre** V^2 au dénominateur.
- 4 **Développer et simplifier** le numérateur seulement (on laisse souvent V^2 factorisé).

Les dérivées trigonométriques

Σ FORMULE 3.7 Sinus et cosinus composés

$$(\sin U)' = U' \times \cos U \quad \text{et} \quad (\cos U)' = U' \times (-\sin U).$$

À retenir : dériver cos fait *apparaître un signe moins*. Le facteur U' est toujours présent dès que l'argument n'est pas simplement x .

❓ EXEMPLE Sinus et cosinus d'une fonction

- $y = \sin(x^2) \Rightarrow y' = (x^2)' \times \cos(x^2) = 2x \cos(x^2).$
- $y = \cos \frac{x}{2} \Rightarrow y' = (\frac{x}{2})' \times (-\sin \frac{x}{2}) = -\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}.$

Σ FORMULE 3.8 Tangente et cotangente composées

$$(\operatorname{tg} U)' = U' \times \frac{1}{\cos^2 U} \quad \text{et} \quad (\operatorname{cotg} U)' = -U' \times \frac{1}{\sin^2 U}.$$

🔗 EXEMPLE Dérivée de tg et cotg

- $y = \operatorname{tg}(2x) \Rightarrow y' = (2x)' \times \frac{1}{\cos^2(2x)} = \frac{2}{\cos^2(2x)}.$
- $y = \operatorname{cotg} x \Rightarrow y' = -(x)' \times \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}.$

Les dérivées des fonctions trigonométriques inverses

Σ FORMULE 3.9 Arc sinus et arc cosinus

$$(\arcsin U)' = \frac{U'}{\sqrt{1-U^2}} \quad \text{et} \quad (\arccos U)' = \frac{-U'}{\sqrt{1-U^2}}.$$

Comme pour $\cos$, l'arc cosinus introduit un signe moins. Le dénominateur $\sqrt{1-U^2}$ impose $-1 < U < 1$.

🔗 EXEMPLE Dérivée de $\arcsin$ et $\arccos$

- $y = \arcsin x \Rightarrow y' = \frac{(x)'}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
- $y = \arccos(x^2) \Rightarrow y' = \frac{-(x^2)'}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}.$

Σ FORMULE 3.10 Arc tangente et arc cotangente

$$(\operatorname{arctg} U)' = \frac{U'}{1+U^2} \quad \text{et} \quad (\operatorname{arccotg} U)' = \frac{-U'}{1+U^2}.$$

EXEMPLE Dérivée de $\arctg$ et $\operatorname{arccotg}$

- $y = \arctg(2x) \Rightarrow y' = \frac{(2x)'}{1+(2x)^2} = \frac{2}{1+4x^2}$.
- $y = \operatorname{arccotg} x \Rightarrow y' = \frac{-(x)'}{1+(x)^2} = \frac{-1}{1+x^2}$.

Les dérivées logarithmiques et exponentielles

FORMULE 3.11 Logarithme de base a et logarithme népérien

$$(\log_a U)' = \frac{U'}{U \ln a} \quad \text{et} \quad (\ln U)' = \frac{U'}{U \times \ln e} = \frac{U'}{U}.$$

où :

- $\ln a$: le logarithme népérien de la base a (constante). Pour le logarithme décimal, $a = 10$ donc $\ln 10$ apparaît ;
- $\ln e = 1$: c'est pourquoi le cas du logarithme népérien se simplifie en $\frac{U'}{U}$;
- U' : la dérivée de l'argument (règle de la chaîne).

EXEMPLE Dérivée de logarithmes

- $y = \log_3 x \Rightarrow y' = \frac{(x)'}{x \ln 3} = \frac{1}{x \ln 3}$.
- $y = \log_{10} x \Rightarrow y' = \frac{(x)'}{x \ln 10} = \frac{1}{x \ln 10}$.
- $y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{(x)'}{x} = \frac{1}{x}$.

FORMULE 3.12 Exponentielle de base a

$$(a^U)' = U' \times a^U \times \ln a.$$

Cas particulier. Pour $a = e$ (puisque $\ln e = 1$), on obtient la propriété remarquable $(e^U)' = U' e^U$: l'exponentielle népérienne est « sa propre dérivée » (au facteur U' près).

EXEMPLE Dérivée d'une exponentielle

$$y = 3^x \Rightarrow y' = (3^x)' = (x)' \times 3^x \times \ln 3 = 3^x \times \ln 3.$$

Tableau récapitulatif des 17 formules

Le tableau ci-dessous rassemble toutes les formules, avec à gauche la règle et à droite une application typique. C'est le formulaire à mémoriser.

N°	Formule de dérivation	Application
1.	$C' = 0$	$y = 3 \Rightarrow y' = 0$
2.	$x' = 1$	$y = 2x \Rightarrow y' = 2$
3.	$(U^n)' = n U^{n-1} U'$	$y = x^4 \Rightarrow y' = 4x^3 ; y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
4.	$(U + V)' = U' + V'$	$y = x^2 + \sqrt[3]{x} \Rightarrow y' = 2x + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
5.	$(UV)' = U'V + UV'$	$y = x\sqrt{x+1} \Rightarrow y' = \sqrt{x+1} + \frac{x}{2\sqrt{x+1}}$
6.	$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$	$y = \frac{x^2}{1+x^4} \Rightarrow y' = \frac{2x(1+x^4) - x^2(4x^3)}{(1+x^4)^2}$
7.	$(\sin U)' = U' \cos U$	$y = \sin x^2 \Rightarrow y' = 2x \cos x^2$
8.	$(\cos U)' = -U' \sin U$	$y = \cos \frac{x}{2} \Rightarrow y' = -\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}$
9.	$(\operatorname{tg} U)' = \frac{U'}{\cos^2 U}$	$y = \operatorname{tg} 2x \Rightarrow y' = \frac{2}{\cos^2 2x}$
10.	$(\operatorname{cotg} U)' = \frac{-U'}{\sin^2 U}$	$y = \operatorname{cotg} x \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sin^2 x}$
11.	$(\arcsin U)' = \frac{U'}{\sqrt{1-U^2}}$	$y = \arcsin x \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12.	$(\arccos U)' = \frac{-U'}{\sqrt{1-U^2}}$	$y = \arccos x^2 \Rightarrow y' = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$
13.	$(\operatorname{arctg} U)' = \frac{U'}{1+U^2}$	$y = \operatorname{arctg} 2x \Rightarrow y' = \frac{2}{1+4x^2}$
14.	$(\operatorname{arccotg} U)' = \frac{-U'}{1+U^2}$	$y = \operatorname{arccotg} x \Rightarrow y' = \frac{-1}{1+x^2}$
15.	$(\log_a U)' = \frac{U'}{U \ln a}$	$y = \log_{10} x \Rightarrow y' = \frac{1}{x \ln 10}$
16.	$(\ln U)' = \frac{U'}{U}$	$y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$
17.	$(a^U)' = U' a^U \ln a$	$y = 3^x \Rightarrow y' = 3^x \ln 3$

REMARQUE

Dans ce tableau récapitulatif, les **ensembles de définition** des fonctions ne sont pas précisés. En pratique, il faut toujours vérifier où la fonction (et sa dérivée) sont définies : par exemple $\sqrt{x}$ n'est dérivable que pour $x > 0$, $\ln x$ que pour $x > 0$, $\operatorname{tg} x$ que là où $\cos x \neq 0$, etc.

La dérivation des fonctions composées

Les formules 3, 7 à 17 contiennent toutes le facteur U' : c'est la marque de la **règle de dérivation en chaîne**. On dérive « de l'extérieur vers l'intérieur », et on **multiplie** par la dérivée de l'intérieur.

☞ **COMMENT FAIRE** *Dériver une fonction composée (« en pelures d'oignon »)*

- 1 **Repérer la couche externe** (la dernière opération appliquée) : est-ce un carré ? un sinus ? une racine ? un logarithme ?
- 2 **Dériver cette couche** en gardant l'intérieur intact (avec la formule correspondante).
- 3 **Multiplier** par la dérivée de l'intérieur (U').
- 4 **Recommencer** si l'intérieur est lui-même composé (on enchaîne les facteurs).

🔗 **EXEMPLE** *Composition de plusieurs couches : $y = \sin^2(\sqrt{x} + 1)$*

La fonction comporte trois couches : un carré, un sinus, une racine. On utilise successivement $(U^n)' = nU^{n-1}U'$ puis $(\sin U)' = U' \cos U$.

Couche 1 — le carré. Avec $U = \sin(\sqrt{x} + 1)$ et $n = 2$:

$$f'(x) = 2 \sin^1(\sqrt{x} + 1) \times (\sin(\sqrt{x} + 1))'$$

Couche 2 — le sinus. On dérive $\sin(\sqrt{x} + 1)$:

$$(\sin(\sqrt{x} + 1))' = (\sqrt{x} + 1)' \times \cos(\sqrt{x} + 1) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 0\right) \cos(\sqrt{x} + 1).$$

Assemblage.

$$f'(x) = 2 \sin(\sqrt{x} + 1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \cos(\sqrt{x} + 1).$$

En utilisant l'identité $2 \sin \theta \cos \theta = \sin(2\theta)$ avec $\theta = \sqrt{x} + 1$, on simplifie :

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin(2(\sqrt{x} + 1))$	pour tout $x \in [1, +\infty[$.
---	----------------------------------

🔗 **EXEMPLE** *Racine d'un logarithme* : $y = \sqrt{\ln(\cos x + 2)}$

On réécrit la racine en puissance : $f(x) = (\ln(\cos x + 2))^{1/2}$. Deux formules sont en jeu : $(U^n)' = nU^{n-1}U'$ et $(\ln U)' = \frac{U'}{U}$.

Couche externe (puissance 1/2).

$$f'(x) = \frac{1}{2} (\ln(\cos x + 2))^{\frac{1}{2}-1} \times (\ln(\cos x + 2))'.$$

Couche interne (logarithme). Avec $U = \cos x + 2$ et $U' = -\sin x$:

$$(\ln(\cos x + 2))' = \frac{-\sin x}{\cos x + 2}.$$

Assemblage.

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{\ln(\cos x + 2)}} \times \frac{-\sin x}{\cos x + 2} = \frac{-\sin x}{2(\cos x + 2)\sqrt{\ln(\cos x + 2)}}$$

🔗 **EXEMPLE** *Logarithme décimal d'un quotient* : $y = \frac{2}{5} + \log\left(\frac{2}{x^2+1}\right)$

Ici $\log$ désigne le logarithme de base 10. On combine $(\log_a U)' = \frac{U'}{U \ln a}$ et la règle du quotient. La constante $\frac{2}{5}$ disparaît à la dérivation.

Dérivée de l'intérieur $U = \frac{2}{x^2+1}$ (quotient avec haut constant) :

$$U' = \frac{0 \times (x^2 + 1) - 2 \times (x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2 \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 + 1)^2}.$$

Application de la formule du logarithme (base 10, donc $\ln 10$) :

$$f'(x) = 0 + \frac{U'}{U \ln 10} = \frac{\frac{-4x}{(x^2+1)^2}}{\frac{2}{x^2+1} \times \ln 10} = \frac{-4x}{(x^2 + 1)^2} \times \frac{x^2 + 1}{2 \ln 10}.$$

Simplification.

$$f'(x) = \frac{-2x}{x^2 + 1} \times \frac{1}{\ln 10}$$

Deux dérivées composées « générales » très utiles

On rencontre souvent des fonctions où l'on ne connaît pas f explicitement, mais seulement le fait qu'elle est dérivable. Les deux résultats suivants sont alors précieux.

🔗 **EXEMPLE** *Le carré d'une fonction* : $g = f^2$

Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g(x) = f^2(x)$. Comme $g = f \times f$ (produit de deux fonctions), la règle du produit donne

$$g'(x) = (f(x) \times f(x))' = f'(x) f(x) + f(x) f'(x) = \boxed{2 f'(x) f(x)}.$$

À retenir : $(f^2)' = 2f'f$ et *non* $2f$: le facteur f' est indispensable (c'est encore la règle de la chaîne, avec $(U^2)' = 2UU'$).

EXEMPLE Trois fois le logarithme d'une fonction : $g = 3 \ln |f|$

Soit f dérivable et ne s'annulant pas sur un intervalle I , et $g(x) = 3 \ln |f(x)|$. On distingue deux cas selon le signe de f , mais le résultat est le même :

- si $f(x) > 0$: $g = 3 \ln f$, donc $g' = 3 \times \frac{f'}{f}$;
- si $f(x) < 0$: $g = 3 \ln(-f)$, donc $g' = 3 \times \frac{(-f)'}{-f} = 3 \times \frac{-f'}{-f} = 3 \times \frac{f'}{f}$.

Dans les deux cas :

$$g'(x) = 3 \times \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

La valeur absolue ne change donc rien à la dérivée : $(\ln |f|)' = \frac{f'}{f}$.

EXEMPLE

Composée avec une fonction inconnue : $v(x) = u(\ln(x+1))$ et $v(x) = u(3x)$

Soit u dérivable. La règle de la chaîne « dérivée de l'extérieur évaluée en l'intérieur, $\times$ dérivée de l'intérieur » donne :

- $v(x) = u(\ln(x+1)) \Rightarrow v'(x) = (\ln(x+1))' \times u'(\ln(x+1)) = \frac{u'(\ln(x+1))}{x+1}$.
- $v(x) = u(3x) \Rightarrow v'(x) = (3x)' \times u'(3x) = 3 u'(3x)$.

En particulier si $u(x) = x^2$ (donc $u'(x) = 2x$ et $u'(3x) = 2 \times 3x = 6x$), on obtient $v'(x) = 3 \times 6x = 18x$. On le vérifie directement : $v(x) = u(3x) = (3x)^2 = 9x^2$, d'où $v'(x) = (9x^2)' = 18x$.

4 Propriétés de la dérivée première : variations et extremums

On entre maintenant dans le cœur des *applications* de la dérivation. La fonction dérivée f' n'est pas un simple objet de calcul : son **signe** raconte tout le comportement de f .

🟢 **PROPRIÉTÉ 4.1** *Signe de f' et sens de variation*

Soit une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (ou sur un intervalle). Le signe de la fonction dérivée f' nous informe sur la **croissance**, la **décroissance** et l'existence des **extremums locaux** (maximum et minimum) de f :

- si $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la fonction f est **croissante** ;
- si $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la fonction f est **décroissante** ;
- si $f'(x) = 0$ **en changeant de signe** $\Rightarrow$ la fonction f présente un **extremum local**, c'est-à-dire :
 - un **maximum local** lorsque f' passe du signe positif au signe négatif ;
 - un **minimum local** lorsque f' passe du signe négatif au signe positif.

Pourquoi ? Si la pente de la tangente est positive ($f' > 0$), la courbe « monte » quand on avance vers la droite : f croît. Si la pente est négative ($f' < 0$), la courbe « descend ». Entre une montée et une descente, la courbe atteint un sommet (maximum) ; entre une descente et une montée, un creux (minimum). En ces points, la tangente est horizontale, donc $f' = 0$.

La figure ci-dessous est le **tableau de variation** de référence : f' est positive, s'annule en x_0 en devenant négative (maximum), puis s'annule en x_1 en redevenant positive (minimum).

x	$-\infty$	x_0	x_1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	0	+
		$f(x_0)$ (maximum)		
$f(x)$				
			$f(x_1)$ (minimum)	

Figure 4 : tableau de variation. La fonction f a un **maximum local** en $x = x_0$ et un **minimum local** en $x = x_1$.

REMARQUE *Le changement de signe est essentiel*

Soit f définie et dérivable sur $]a; b[$. Si f' s'annule en x_0 ($x_0 \in]a; b[$) **et change de signe**, alors f admet un extremum local en x_0 .

- Si f' s'annule *sans* changer de signe, il n'y a *pas* d'extremum (la courbe a juste une tangente horizontale puis repart dans le même sens : c'est un *point d'inflexion à tangente horizontale*).
- On peut aussi avoir un maximum/minimum **sans dérivée nulle** (par exemple à un point anguleux, ou au bord d'un intervalle fermé).

COMMENT FAIRE *Dresser le tableau de variation d'une fonction*

- 1 **Déterminer le domaine** de définition de f .
- 2 **Calculer** $f'(x)$ avec les formules de dérivation.
- 3 **Résoudre** $f'(x) = 0$: ce sont les abscisses candidates aux extremums (les « racines » de f').
- 4 **Étudier le signe de** f' entre ces racines (tableau de signes — souvent en factorisant f').
- 5 **Traduire** : $f' > 0 \Rightarrow$ flèche montante ; $f' < 0 \Rightarrow$ flèche descendante.
- 6 **Repérer les extremums** là où f' change de signe, et calculer les valeurs $f(x_i)$.

Exemple détaillé : une dérivée qui ne change pas de signe

🔗 **EXEMPLE** $f(x) = 3x^3 - 3x^2 + x + 1$ — fonction toujours croissante

On considère f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^3 - 3x^2 + x + 1$. Étudions ses variations.

Étape 1 — calculer la dérivée. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme) et

$$f'(x) = 3 \times 3x^2 - 3 \times 2x + 1 + 0 = 9x^2 - 6x + 1.$$

Étape 2 — factoriser et chercher les racines. On reconnaît une identité remarquable :

$$f'(x) = 9x^2 - 6x + 1 = (3x - 1)^2.$$

Cette dérivée s'annule au point $x = \frac{1}{3}$ (car $3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$).

Étape 3 — étudier le signe. Un carré est toujours positif ou nul : $(3x - 1)^2 \geq 0$ pour tout x . Donc $f'(x) \geq 0$ partout, et f' **ne change pas de signe** en $\frac{1}{3}$ (elle s'annule mais reste positive de part et d'autre).

Étape 4 — conclure. La fonction f est **croissante sur tout $\mathbb{R}$** . Bien que $f'(\frac{1}{3}) = 0$, il n'y a **aucun extremum local** (la dérivée ne change pas de signe) : en $x = \frac{1}{3}$, la courbe présente seulement une tangente horizontale, c'est un point d'inflexion à tangente horizontale.

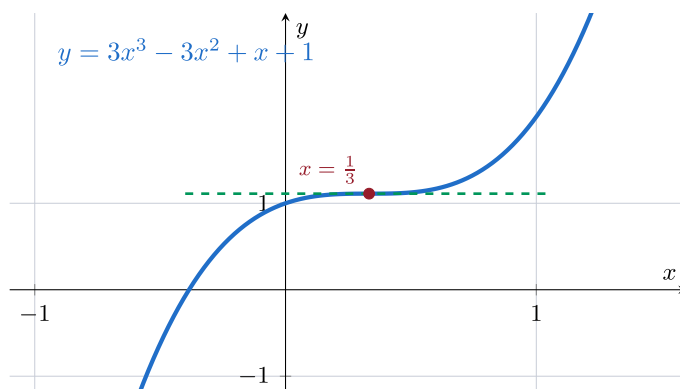


Figure 5 : la courbe de $f(x) = 3x^3 - 3x^2 + x + 1$ est strictement croissante ; en $x = \frac{1}{3}$ la tangente est horizontale mais il n'y a pas d'extremum.

Exemple détaillé : compter les extremums

🔗 **EXEMPLE** $f(x) = \frac{x^5}{5} - 16x$ — combien d'extremums ?

On considère f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^5}{5} - 16x$. Cherchons le nombre d'extremums locaux.

Étape 1 — dériver.

$$f'(x) = \frac{5x^4}{5} - 16 = x^4 - 16.$$

Étape 2 — factoriser. On utilise deux fois l'identité $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$:

$$f'(x) = x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4).$$

Étape 3 — résoudre $f'(x) = 0$. Le facteur $x^2 + 4 > 0$ ne s'annule jamais. Il reste

$$f'(x) = 0 \iff x = 2 \text{ ou } x = -2.$$

Étape 4 — tableau de signes. On reporte les signes de chaque facteur :

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$x + 2$	$-$	0	$+$	$+$
$x - 2$	$-$		$-$	0
$x^2 + 4$	$+$		$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0

Étape 5 — conclure. La dérivée f' change de signe **deux fois** :

- en $x = -2$: f' passe de + à — $\Rightarrow$ **maximum local** en -2 ;
- en $x = 2$: f' passe de — à + $\Rightarrow$ **minimum local** en 2 .

La fonction possède donc **exactement 2 extremums locaux**.

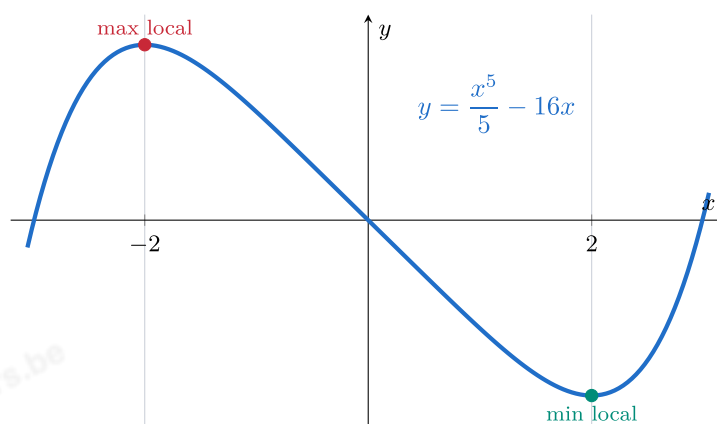


Figure 6 : la courbe de $f(x) = \frac{x^5}{5} - 16x$ présente un maximum local en $x = -2$ et un minimum local en $x = 2$.

5 Propriétés de la dérivée seconde : concavité et inflexion

La dérivée f' est elle-même une fonction : on peut donc la dériver à son tour. On obtient la **dérivée seconde**, notée f'' (lire « f seconde »). Là où f' renseigne sur les variations de f , la dérivée seconde f'' renseigne sur la **forme** de la courbe : sa **concavité**.

DÉFINITION 5.1 Dérivée seconde

Soit f' définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La **dérivée seconde** de f est la dérivée de la dérivée première :

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

PROPRIÉTÉ 5.1 Signe de f'' et concavité

C'est la dérivée seconde f'' qui nous informe sur la **concavité** de la courbe et sur les **points d'inflexion** :

- si $f''(x) > 0 \Rightarrow$ la concavité est orientée vers les **y positifs** (vers le **haut**) : la courbe a la forme d'un « bol » $\cup$;
- si $f''(x) < 0 \Rightarrow$ la concavité est orientée vers les **y négatifs** (vers le **bas**) : la courbe a la forme d'une « cloche » $\cap$;
- le point $A(x_0, y_0)$ est un **point d'inflexion** de f si et seulement si :
 - $f''(x_0)$ **s'annule en changeant de signe**, et
 - $f'(x_0)$ existe.

Image à retenir. Un point d'inflexion est un point où la courbe « change de courbure » : elle passe de creuse vers le haut à creuse vers le bas (ou l'inverse). C'est l'endroit où la tangente *traverse* la courbe.

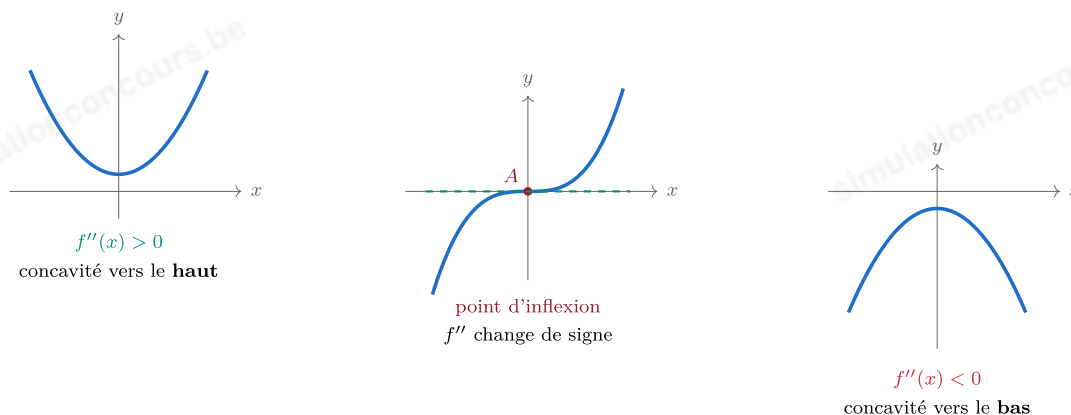


Figure 7 : à gauche $f'' > 0$ (bol, vers le haut), au milieu un point d'inflexion (changement de concavité), à droite $f'' < 0$ (cloche, vers le bas).

☞ **COMMENT FAIRE** *Étudier la concavité et trouver les points d'inflexion*

- 1 **Calculer** f' , puis dériver à nouveau pour obtenir f'' .
- 2 **Résoudre** $f''(x) = 0$: ce sont les candidats « points d'inflexion ».
- 3 **Étudier le signe** de f'' : là où $f'' > 0$, concavité vers le haut ; là où $f'' < 0$, concavité vers le bas.
- 4 **Confirmer** chaque point d'inflexion : il faut que f'' *change* de signe (et que f' existe au point).

EXEMPLE Une concavité toujours tournée vers le haut

Soit $f(x) = x - 3 \ln |x + 2|$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ (on l'étudiera complètement à la section 8). Sa dérivée première est $f'(x) = 1 - \frac{3}{x+2}$. Dérivons une seconde fois :

$$f''(x) = \left(1 - \frac{3}{x+2}\right)' = (-3(x+2)^{-1})' = -3 \times (-1)(x+2)^{-2} \times 1 = \frac{3}{(x+2)^2}.$$

Le facteur $(x+2)^2$ est *strictement positif* pour tout $x \neq -2$. Donc $f''(x) > 0$ sur tout $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$: la concavité de f est **toujours orientée vers le haut**, et la fonction n'admet **aucun point d'inflexion** (puisque f'' ne change jamais de signe).

Lecture d'un point particulier. La courbe de f'' coupe l'axe des ordonnées au point d'abscisse 0, c'est-à-dire en $(0; f''(0))$:

$$f''(0) = \frac{3}{(0+2)^2} = \frac{3}{4} = 0,75,$$

donc ce point de rencontre est $(0; \frac{3}{4})$.

6 L'équation de la tangente

On a vu que $f'(x_0)$ est la *pente* de la tangente à la courbe au point d'abscisse x_0 . On peut maintenant écrire l'**équation complète** de cette droite tangente.

PROPRIÉTÉ 6.1 Équation de la tangente en un point

Soit f une fonction dérivable en x_0 . Dans un repère orthonormé, la droite passant par $P_0(x_0; f(x_0))$ et de pente $f'(x_0)$ est la **tangente** à la courbe d'équation $y = f(x)$ au point P_0 . Son équation est :

$$y = (x - x_0) f'(x_0) + f(x_0)$$

où :

- $f'(x_0)$: la **pente** (coefficient angulaire) de la tangente — le nombre dérivé en x_0 ;
- $f(x_0)$: l'**ordonnée** du point de contact P_0 ;
- x_0 : l'**abscisse** du point de contact ;

- $(x; y)$: les coordonnées d'un point *quelconque* de la tangente.

D'où vient cette formule ? Une droite de pente m passant par $(x_0; y_0)$ a pour équation $y - y_0 = m(x - x_0)$. En prenant $m = f'(x_0)$ et $y_0 = f(x_0)$, on retrouve exactement la formule encadrée. La tangente de f en P_0 est aussi la limite du taux $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ quand x tend vers x_0 .

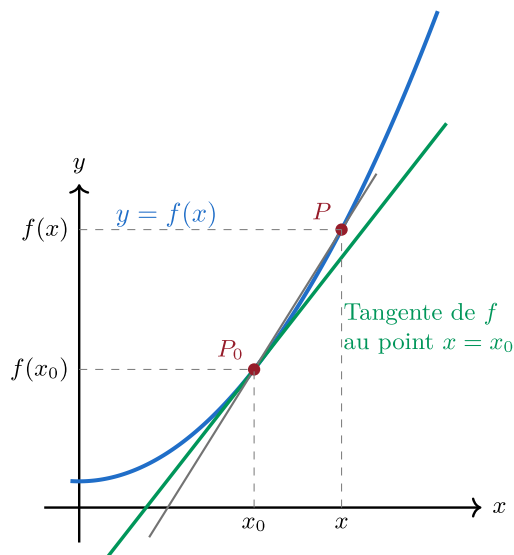


Figure 8 : la tangente en P_0 est la position limite de la sécante (P_0P) lorsque $P \rightarrow P_0$. Sa pente est $f'(x_0)$.

☞ **COMMENT FAIRE** Déterminer l'équation de la tangente en $x = x_0$

- 1 **Calculer** $f(x_0)$: l'ordonnée du point de contact.
- 2 **Calculer** $f'(x)$, puis **évaluer** $f'(x_0)$: la pente.
- 3 **Remplacer** dans $y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$.
- 4 **Développer** pour obtenir la forme $y = mx + p$ si on le souhaite.

📌 **REMARQUE** Tangentes particulières

- **Tangente horizontale** : si $f'(x_0) = 0$, la tangente est horizontale d'équation $y = f(x_0)$ (cas des extremums et inflexions à tangente horizontale).
- **Droites perpendiculaires** : deux droites de pentes m_1 et m_2 sont perpendiculaires si et seulement si $m_1 \times m_2 = -1$ (c'est-à-dire $m_2 = -\frac{1}{m_1}$, « l'opposé de l'inverse »).
- **Lecture de pente sur un graphe** : plus la courbe « monte raide » en un point, plus f' y est grand ; une courbe qui « descend » a $f' < 0$.

Exemple détaillé : tangente horizontale

 **EXEMPLE** Une tangente horizontale en $x = 1$ pour $f(x) = x - 3 \ln |x + 2|$

Reprenons $f(x) = x - 3 \ln |x + 2|$, dont la dérivée est $f'(x) = 1 - \frac{3}{x+2}$ (calcul détaillé à la section 8). L'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 1$ est $y = (x - 1)f'(1) + f(1)$.

Pente.

$$f'(1) = 1 - \frac{3}{1+2} = 1 - \frac{3}{3} = 1 - 1 = 0.$$

La pente est nulle : **la tangente est horizontale.**

Ordonnée du point de contact.

$$f(1) = 1 - 3 \ln |1 + 2| = 1 - 3 \ln 3.$$

Équation de la tangente. Avec $f'(1) = 0$:

$$y = (x - 1) \times 0 + (1 - 3 \ln 3) \implies \boxed{y = 1 - 3 \ln 3}.$$

C'est bien l'équation d'une droite horizontale.

Exemple détaillé : retrouver $f'(x_0)$ à partir d'un point de la tangente

 **EXEMPLE** La tangente en $x = 1$ passe par $(3; 2)$, avec $f(1) = 0$

Soit f continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. On sait, par lecture graphique, que $f(1) = 0$ et que la tangente à la courbe au point d'abscisse 1 passe **également** par le point de coordonnées $(3; 2)$. Quel est le nombre dérivé $f'(1)$?

Méthode 1 — par la formule de la tangente. L'équation de la tangente en $x = 1$ est $y = (x - 1)f'(1) + f(1)$. Comme elle passe par $(3; 2)$, on remplace $x = 3$ et $y = 2$:

$$2 = (3 - 1)f'(1) + f(1) = 2f'(1) + 0.$$

On résout : $2 = 2f'(1) \Rightarrow f'(1) = 1$.

Méthode 2 — par la pente entre deux points. Le nombre dérivé $f'(1)$ est le coefficient angulaire de la tangente. Cette droite passe par les points $(1; f(1)) = (1; 0)$ et $(3; 2)$. Sa pente vaut donc

$$f'(1) = \frac{2 - 0}{3 - 1} = \frac{2}{2} = 1.$$

Les deux méthodes concordent : $f'(1) = 1$.

Exemple détaillé : tangentes et perpendicularité

EXEMPLE Tangente perpendiculaire à une droite donnée

Toujours pour $f(x) = x - 3 \ln |x + 2|$ (donc $f'(x) = 1 - \frac{3}{x+2}$), montrons que la tangente au point d'abscisse $x = 0$ est perpendiculaire à la droite d'équation $y = 2x + 1$.

Pente de la tangente en 0.

$$f'(0) = 1 - \frac{3}{0+2} = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Ordonnée du point de contact. $f(0) = 0 - 3 \ln |0 + 2| = -3 \ln 2$.

Équation de la tangente en 0.

$$y = (x - 0) \times \left(-\frac{1}{2}\right) + (-3 \ln 2) = -\frac{1}{2}x - 3 \ln 2.$$

Test de perpendicularité. La droite $y = 2x + 1$ a pour pente $m_1 = 2$; la tangente a pour pente $m_2 = -\frac{1}{2}$. Or

$$m_1 \times m_2 = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1.$$

Le produit des pentes vaut -1 : les deux droites sont bien **perpendiculaires**. (Autrement dit, $-\frac{1}{2}$ est « l'opposé de l'inverse » de 2.)

7 Lire un graphe : relier f , f' et f''

Beaucoup de questions ne demandent aucun calcul : il suffit de *lire* une courbe et d'en déduire des informations sur la dérivée. Voici les correspondances à maîtriser, puis des exemples détaillés.

☞ **COMMENT FAIRE** Dédire le signe de f' et f'' à partir de la courbe de f

- **Où f monte** (croissante) $\Rightarrow f' > 0$; **où f descend** (décroissante) $\Rightarrow f' < 0$.
- **Aux sommets et aux creux** (extremums) à tangente horizontale $\Rightarrow f' = 0$.
- **Où la courbe est un « bol »** $\smile$ (concave vers le haut) $\Rightarrow f'' > 0$; **où elle est une « cloche »** $\frown$ (concave vers le bas) $\Rightarrow f'' < 0$.
- **La courbe de f'** coupe l'axe des x là où f a un extremum ; elle est au-dessus de l'axe là où f croît, en dessous là où f décroît.

Exemple détaillé : analyser une courbe donnée

🔔 EXEMPLE Lecture d'une courbe avec maximum et minimum

On considère une fonction f définie sur $[-8; 8]$ dont l'allure est la suivante : f croît fortement de $x = -8$ jusqu'à un **maximum** au point C (vers $x \approx 0$, à hauteur $y \approx 7$), puis chute jusqu'à un **minimum** au point B (vers $x \approx 1$, à hauteur $y \approx 0$), et remonte doucement ensuite ; le point A se situe juste après B , sur la partie remontante.

Analysons quelques affirmations typiques :

- « **f est croissante sur $[1; 8]$** » — **Vrai**. Après le minimum B (vers $x = 1$), la courbe remonte : pour $x_1 < x_2$ dans $[1; 8]$, on a $f(x_1) < f(x_2)$.
- « **f' est strictement positive sur $[-8; -2]$** » — **Vrai**. Sur cette partie, f est strictement croissante, donc sa pente (donc f') est strictement positive.
- « **Au point A , la dérivée de f est nulle** » — **Faux**. En A la courbe *monte* (partie remontante après B) : la tangente est une droite oblique de *pente positive*, donc $f'(A) > 0$, pas 0.
- « **f a un maximum et un minimum sur $[-8; 8]$** » — **Vrai** : maximum local au point C , minimum local (négatif ou nul) au point le plus bas, situé entre A et B .
- « **La tangente au point C est horizontale** » — **Vrai** : C est un maximum, donc $f'(C) = 0$ et la tangente y est horizontale.
- « **La tangente au point A a un coefficient angulaire positif** » — **Vrai**, car la courbe monte en A (cohérent avec $f'(A) > 0$).

Comparer des nombres dérivés. Pour deux abscisses, on compare les *pent*es : là où la courbe monte plus raide, f' est plus grand. Par exemple, si en $x = -4$ la montée est plus raide qu'en $x = 0$ (sommet, pente nulle), alors $f'(-4) > f'(0)$.

Exemple détaillé : la courbe de f et celle de f'

🔗 EXEMPLE Reconnaître la courbe de la dérivée

Soit f continue et dérivable, dont la courbe a la forme d'une cubique : elle **monte** jusqu'à un maximum en $x = 0$, **descend** jusqu'à un minimum en $x = 2$, puis **remonte**. Quelle est l'allure de la courbe de f' ?

Raisonnement.

- f admet un extremum en $x = 0$ et en $x = 2 \Rightarrow f'(0) = 0$ et $f'(2) = 0$: la courbe de f' **coupe l'axe des x** en 0 et en 2.
- Avant 0, f croît $\Rightarrow f' > 0$ (courbe de f' au-dessus de l'axe).
- Entre 0 et 2, f décroît $\Rightarrow f' < 0$ (courbe de f' sous l'axe).
- Après 2, f croît $\Rightarrow f' > 0$ (au-dessus de l'axe).

La dérivée d'une cubique est une **parabole** ; ici elle s'annule en 0 et 2, est positive à l'extérieur de $[0; 2]$ et négative à l'intérieur : c'est donc une parabole tournée vers le haut, passant par $(0; 0)$ et $(2; 0)$.

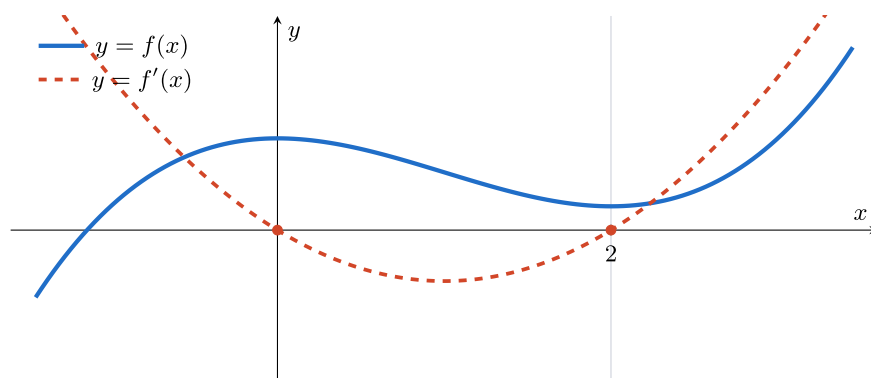


Figure 9 : la courbe de f (trait plein bleu) a ses extremums en $x = 0$ et $x = 2$; la courbe de f' (pointillés rouges) y coupe l'axe des abscisses.

Exemple détaillé : retrouver une fonction à partir d'un tableau de signes

 **EXEMPLE** Quelle fonction colle au tableau de signes de f' ?

On donne le tableau de signes suivant pour f' : la dérivée f' est **strictement positive partout** (+ avant et après), **sauf en $x = \frac{2}{3}$ où elle n'est pas définie** (symbole $\nexists$). Parmi plusieurs expressions, laquelle correspond ?

Lecture du tableau. On cherche une fonction f dont la dérivée f' vérifie deux conditions : (i) $f'(x) > 0$ pour tout $x \neq \frac{2}{3}$, et (ii) f' n'est pas définie en $x = \frac{2}{3}$. La non-définition en $\frac{2}{3}$ suggère un dénominateur qui s'annule, du type $(2 - 3x)$, car $2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$.

Test du bon candidat $f(x) = \frac{-3x^2 + 4x}{2 - 3x}$. C'est un quotient $\frac{U}{V}$ avec $U = -3x^2 + 4x$ (donc $U' = -6x + 4$) et $V = 2 - 3x$ (donc $V' = -3$). La règle du quotient donne :

$$f'(x) = \frac{(-6x + 4)(2 - 3x) - (-3x^2 + 4x)(-3)}{(2 - 3x)^2}.$$

Développons le numérateur :

$$(-6x + 4)(2 - 3x) = -12x + 18x^2 + 8 - 12x = 18x^2 - 24x + 8,$$

$$-(-3x^2 + 4x)(-3) = -(9x^2 - 12x) = -9x^2 + 12x.$$

Somme : $18x^2 - 24x + 8 - 9x^2 + 12x = 9x^2 - 12x + 8$. Donc

$$f'(x) = \frac{9x^2 - 12x + 8}{(2 - 3x)^2}.$$

Signe. Le dénominateur $(2 - 3x)^2 > 0$. Pour le numérateur, le discriminant vaut

$$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 9 \times 8 = 144 - 288 = -144 < 0,$$

et le coefficient dominant $a = 9 > 0$: un trinôme de discriminant négatif garde le signe de a , donc $9x^2 - 12x + 8 > 0$ partout. Ainsi $f'(x) > 0$ pour tout $x \neq \frac{2}{3}$, et f' n'est pas définie en $\frac{2}{3}$: les **deux conditions du tableau sont vérifiées**.

Pourquoi pas les autres ? Pour $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2 - 3x}$, on trouve $f'(x) = \frac{-3x^2 + 4x - 3}{(2 - 3x)^2}$, dont le numérateur $-3x^2 + 4x - 3$ a $\Delta = 16 - 36 = -20 < 0$ et $a = -3 < 0$: il est *toujours négatif*, donc $f' < 0$

— cela ne colle pas. De même $f(x) = \frac{-3}{2-3x}$ donne $f'(x) = \frac{-9}{(2-3x)^2} < 0$. Ces candidats sont écartés.

8 Étude de fonction complète : mettre tous les outils ensemble

Cette section rassemble tout le cours sur un seul exemple « fil rouge », étudié à fond. On y voit comment domaine, dérivée première, tableau de variation, dérivée seconde, concavité et tangentes s'articulent.

EXEMPLE Étude complète de $f(x) = x - 3 \ln |x + 2|$

On considère, dans un repère orthonormé, la fonction f définie par $f(x) = x - 3 \ln |x + 2|$.

Étape 1 — domaine de définition. Le logarithme exige un argument strictement positif ; la valeur absolue $|x + 2|$ est strictement positive sauf quand $x + 2 = 0$. Donc

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}.$$

La valeur absolue permet d'écrire f sans le symbole $|\cdot|$ sur deux intervalles :

$$\begin{cases} f(x) = x - 3 \ln(x + 2) & \text{si } x \in]-2; +\infty[, \\ f(x) = x - 3 \ln(-x - 2) & \text{si } x \in]-\infty; -2[. \end{cases}$$

Étape 2 — dérivée première. On dérive sur chaque morceau avec $(\ln U)' = \frac{U'}{U}$:

- sur $] - 2; +\infty[: f'(x) = 1 - 3 \times \frac{1}{x+2} = 1 - \frac{3}{x+2}$;
- sur $] - \infty; -2[: f'(x) = 1 - 3 \times \frac{-1}{-x-2} = 1 - \frac{3}{x+2}$.

Les deux expressions coïncident : pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$,

$$f'(x) = 1 - \frac{3}{x+2} = \frac{(x+2) - 3}{x+2} = \frac{x-1}{x+2}$$

Étape 3 — racine et signe de f' . La dérivée s'annule au numérateur :

$$f'(x) = 0 \iff x - 1 = 0 \iff x = 1.$$

On étudie le signe du quotient $\frac{x-1}{x+2}$ en plaçant les valeurs -2 (interdite) et 1 :

Valeur de x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x - 1$	$-$		0	$+$
$x + 2$	$-$	0	$+$	$+$
$f'(x) = \frac{x-1}{x+2}$	$+$	$-$	0	$+$

Étape 4 — variations. On en déduit :

- sur $] - \infty; -2[: f' > 0$, f est **croissante** ;
- sur $] - 2; 1[: f' < 0$, f est **décroissante** ;

- sur $]1; +\infty[: f' > 0$, f est **croissante**.

En $x = 1$, f' passe de $-$ à $+$: f admet un **minimum local** en 1, de valeur $f(1) = 1 - 3 \ln 3$. En particulier, f est strictement croissante sur $[1; 4]$.

Étape 5 — dérivée seconde et concavité. On dérive $f'(x) = 1 - 3(x + 2)^{-1}$:

$$f''(x) = -3 \times (-1)(x + 2)^{-2} = \frac{3}{(x + 2)^2}.$$

Comme $(x + 2)^2 > 0$ pour tout $x \neq -2$, on a $f''(x) > 0$ partout : la concavité est **toujours vers le haut**, et il n'y a **aucun point d'inflexion**.

Étape 6 — quelques tangentes remarquables. (Voir aussi les exemples de la section 6.)

- En $x = 1$: $f'(1) = \frac{1-1}{1+2} = 0$, donc la tangente est **horizontale** : $y = 1 - 3 \ln 3$ (cohérent avec le minimum).
- En $x = 4$: $f'(4) = \frac{4-1}{4+2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$: le coefficient angulaire de la tangente vaut $\frac{1}{2}$.
- En $x = 0$: $f'(0) = \frac{0-1}{0+2} = -\frac{1}{2}$; la tangente $y = -\frac{1}{2}x - 3 \ln 2$ est **perpendiculaire** à $y = 2x + 1$ (produit des pentes = -1).

Étape 7 — point de rencontre de f'' avec l'axe des ordonnées. C'est $(0; f''(0))$ avec $f''(0) = \frac{3}{(0+2)^2} = \frac{3}{4} = 0,75$. Le point est $(0; \frac{3}{4})$.

Synthèse graphique.

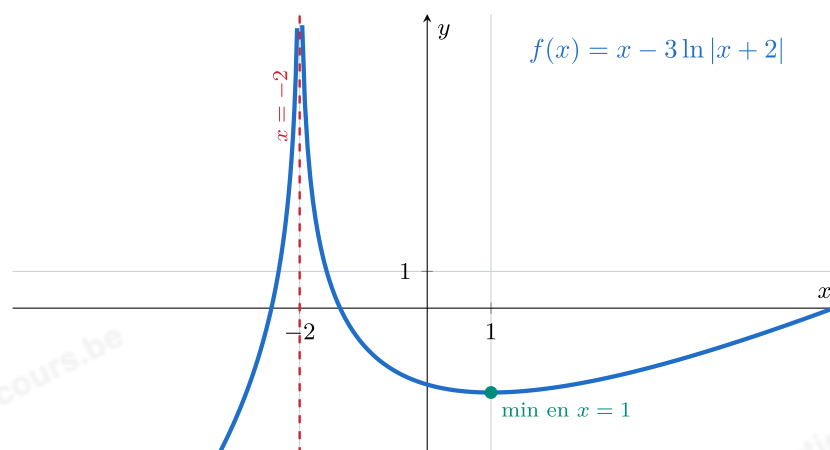


Figure 10 : la courbe de $f(x) = x - 3 \ln |x + 2|$. Asymptote verticale en $x = -2$ (hors domaine), branche gauche croissante, minimum local en $x = 1$, concavité toujours vers le haut.

Exemple détaillé : reconstituer les paramètres d'une fonction

 **EXEMPLE** Trouver m, n, p pour $f(x) = mx^2 + nx + p$

Soit $f(x) = mx^2 + nx + p$ avec $m, n, p \in \mathbb{R}$. On donne trois informations : (i) la courbe de f coupe l'axe des ordonnées en $y = 1$; (ii) la courbe de f' passe par le point $(1; 3)$; (iii) l'axe de symétrie de la courbe de f est la droite $x = \frac{5}{8}$. Déterminons m, n et p .

Condition (i) — l'ordonnée à l'origine. La courbe coupe l'axe des y en $x = 0$, donc $f(0) = 1$. Or $f(0) = m \times 0^2 + n \times 0 + p = p$. D'où

$$\boxed{p = 1}.$$

Condition (ii) — un point de la dérivée. La dérivée est $f'(x) = 2mx + n$. Le point $(1; 3)$ appartient à sa courbe, donc $f'(1) = 3$:

$$f'(1) = 2m \times 1 + n = 2m + n = 3. \quad (\text{I})$$

Condition (iii) — l'axe de symétrie. Pour une parabole $mx^2 + nx + p$, l'axe de symétrie est $x = \frac{-n}{2m}$. La condition donne

$$\frac{-n}{2m} = \frac{5}{8} \iff 8(-n) = 5(2m) \iff 10m + 8n = 0. \quad (\text{II})$$

Résolution du système. On résout

$$\begin{cases} 2m + n = 3 & (\text{I}) \\ 10m + 8n = 0 & (\text{II}) \end{cases}$$

On multiplie (I) par -5 pour opposer les coefficients de m :

$$\begin{cases} -10m - 5n = -15 & (\text{I}') \\ 10m + 8n = 0 & (\text{II}) \end{cases}$$

La somme (I')+(II) donne $3n = -15$, soit $n = -5$. En reportant dans (I) : $2m + (-5) = 3 \Rightarrow 2m = 8 \Rightarrow m = 4$.

Conclusion. $\boxed{m = 4, \quad n = -5, \quad p = 1}$, c'est-à-dire $f(x) = 4x^2 - 5x + 1$.

9 Synthèse

La carte ci-dessous résume les liens entre f , sa dérivée première f' et sa dérivée seconde f'' .

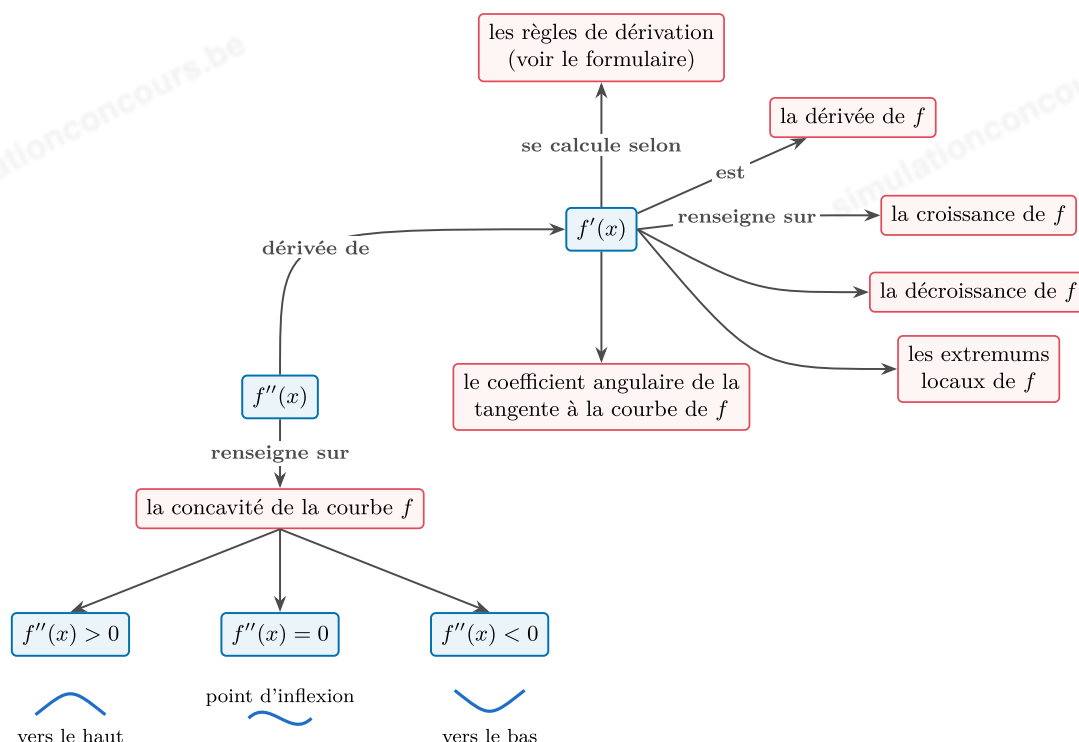


Figure 11 : carte de synthèse — ce que f' et f'' nous apprennent sur f .

REMARQUE Trois précisions importantes

- Cette synthèse concerne les fonctions dont les dérivées à gauche et à droite des points choisis existent et sont égales (fonctions « lisses »).
- On peut avoir un maximum ou un minimum **sans dérivée nulle** (point anguleux, bord d'intervalle).
- Un extremum **local** peut aussi être un extremum **global** (sur tout le domaine).

Formulaire à mémoriser

MÉMO L'ESSENTIEL DE LA DÉRIVATION

Définition (nombre dérivé / pente de la tangente / vitesse instantanée) :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Règles de calcul :

$$(C)' = 0, \quad (x)' = 1, \quad (U^n)' = nU^{n-1}U', \quad (U + V)' = U' + V',$$

$$(UV)' = U'V + UV', \quad \left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}.$$

$$(\sin U)' = U' \cos U, \quad (\cos U)' = -U' \sin U, \quad (\operatorname{tg} U)' = \frac{U'}{\cos^2 U},$$

$$(\ln U)' = \frac{U'}{U}, \quad (\log_a U)' = \frac{U'}{U \ln a}, \quad (a^U)' = U' a^U \ln a.$$

Étude de fonction :

- $f' > 0 \Rightarrow f$ croît ; $f' < 0 \Rightarrow f$ décroît ; $f' = 0$ en changeant de signe $\Rightarrow$ extremum.
- $f'' > 0 \Rightarrow$ concavité vers le haut ; $f'' < 0 \Rightarrow$ vers le bas ; $f'' = 0$ en changeant de signe $\Rightarrow$ inflexion.
- Tangente en x_0 : $y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$.

Fin du cours — Fiche 5 : Dérivation. Document rédigé d'après l'extrait du livre, figures TikZ originales.

— Fin de la fiche · Dérivation —



Le cours est lu – maintenant, entraîne-toi.



Tout ce qu'il faut pour transformer ce chapitre en points le jour du concours :

Sur simulationconcours.be

- ✓ Le carnet d'entraînement de cette fiche, corrigé pas à pas
- ✓ Le QCM blanc du chapitre, type concours
- ✓ La fiche de révision condensée, à imprimer
- ✓ Tous les autres cours, gratuits, chapitre par chapitre

Tous les jeudis : simulation du concours en ligne

En conditions réelles — chrono, QCM type concours et score immédiat.



Rejoins-nous sur simulationconcours.be

scanne le QR ou tape l'adresse — les cours complets sont gratuits