



Mathématiques

Synthèse · Fiche 5

Dérivation

L'essentiel du chapitre, condensé pour réviser vite.

6 sections

4 min de lecture

Pack Réussite

À maîtriser

- ✓ la définition du **nombre dérivé** (limite du taux d'accroissement) et ses deux lectures : pente de la **tangente**, **vitesse instantanée** ;
- ✓ les **17 formules** du formulaire de dérivation (puissances, produit, quotient, composées, trigo, log, exp) ;
- ✓ le lien **signe de f'** → variations / extremums, et **signe de f''** → concavité / inflexion ;
- ✓ l'**équation de la tangente** en un point et le test de perpendicularité.



simulationconcours.be

scanne & continue en ligne

1 Le nombre dérivé et la fonction dérivée

DÉFINITION 1.1 Taux d'accroissement

Pour f et x_0 fixé, $h \neq 0$:

$$\tau(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

est la pente de la **sécante** (AB) , avec $A(x_0, f(x_0))$ et $B(x_0 + h, f(x_0 + h))$.

DÉFINITION 1.2 Nombre dérivé

f est **dérivable en x_0** si $\tau(h)$ admet une limite réelle quand $h \rightarrow 0$. Cette limite, le **nombre dérivé**, se note :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

PROPRIÉTÉ 1.1 Deux lectures de $f'(x_0)$

- **Géométrique** : la sécante tend vers la **tangente** ; $f'(x_0)$ en est la pente.
- **Cinématique** : si f est la position, $f'(x_0)$ est la **vitesse instantanée** en x_0 . (Ex. : $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow f'(x) = x$; on retrouve l'accélération $a = \Delta v / \Delta t$.)

ATTENTION Continuité $\neq$ dérivabilité

Dérivable en $x_0 \Rightarrow$ continue en x_0 , mais la **reciproque est fautive** : $f(x) = |x|$ est continue en 0 mais n'y est **pas dérivable** (point anguleux, pas de tangente unique). $f'(x_0)$ est un **nombre** ; f' est une **fonction**.

2 Le formulaire de dérivation

Conventions : a constante > 0 , C constante, U, V fonctions de x , U', V' leurs dérivées.

N°	Formule	Exemple
1.	$C' = 0$	$y = 3 \Rightarrow y' = 0$
2.	$x' = 1$	$y = 2x \Rightarrow y' = 2$
3.	$(U^n)' = n U^{n-1} U'$	$y = x^4 \Rightarrow y' = 4x^3$; $y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
4.	$(U + V)' = U' + V'$	$y = x^2 + \sqrt[3]{x} \Rightarrow y' = 2x + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
5.	$(UV)' = U'V + UV'$	$y = x\sqrt{x+1} \Rightarrow y' = \sqrt{x+1} + \frac{x}{2\sqrt{x+1}}$
6.	$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$	$y = \frac{x^2}{1+x^4} \Rightarrow y' = \frac{2x(1+x^4) - 4x^5}{(1+x^4)^2}$
7.	$(\sin U)' = U' \cos U$	$y = \sin x^2 \Rightarrow y' = 2x \cos x^2$
8.	$(\cos U)' = -U' \sin U$	$y = \cos \frac{x}{2} \Rightarrow y' = -\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}$
9.	$(\operatorname{tg} U)' = \frac{U'}{\cos^2 U}$	$y = \operatorname{tg} 2x \Rightarrow y' = \frac{2}{\cos^2 2x}$
10.	$(\operatorname{cotg} U)' = \frac{-U'}{\sin^2 U}$	$y = \operatorname{cotg} x \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sin^2 x}$
11.	$(\arcsin U)' = \frac{U'}{\sqrt{1-U^2}}$	$y = \arcsin x \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12.	$(\arccos U)' = \frac{-U'}{\sqrt{1-U^2}}$	$y = \arccos x^2 \Rightarrow y' = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$
13.	$(\operatorname{arctg} U)' = \frac{U'}{1+U^2}$	$y = \operatorname{arctg} 2x \Rightarrow y' = \frac{2}{1+4x^2}$
14.	$(\operatorname{arccotg} U)' = \frac{-U'}{1+U^2}$	$y = \operatorname{arccotg} x \Rightarrow y' = \frac{-1}{1+x^2}$
15.	$(\log_a U)' = \frac{U'}{U \ln a}$	$y = \log_{10} x \Rightarrow y' = \frac{1}{x \ln 10}$
16.	$(\ln U)' = \frac{U'}{U}$	$y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$
17.	$(a^U)' = U' a^U \ln a$	$y = 3^x \Rightarrow y' = 3^x \ln 3$

⚠ ATTENTION Pièges classiques

- $(UV)' \neq U'V'$: il faut $U'V + UV'$.
- Ordre du quotient : $U'V - UV'$ (jamais $UV' - U'V$), puis diviser par V^2 .
- Les formules 3, 7 à 17 contiennent toutes U' (règle de la **chaîne**) : on dérive la couche externe *en gardant l'intérieur*, puis on multiplie par la dérivée de l'intérieur. On répète si l'intérieur est lui-même composé.

EXEMPLE Composée à deux couches

$y = \sin^2(\sqrt{x} + 1)$: carré (externe) puis sinus (interne).

$$y' = 2 \sin(\sqrt{x} + 1) \times \cos(\sqrt{x} + 1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin(2(\sqrt{x} + 1)).$$

3 Signe de f' et de f'' : variations, extremums, concavité

PROPRIÉTÉ 3.1 Signe de $f' \Rightarrow$ variations et extremums

- $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ **croissante** ; $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ **décroissante**.
- $f'(x) = 0$ **en changeant de signe** $\Rightarrow$ **extremum local** : maximum si $+$ $\rightarrow$ $-$, minimum si $- \rightarrow +$.

x	$-\infty$	x_0	x_1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$				

Figure 1 : tableau de variation type — maximum en x_0 , minimum en x_1 .

ATTENTION $f' = 0$ ne suffit pas

Si f' s'annule **sans changer de signe**, il n'y a **pas** d'extremum (juste une tangente horizontale : point d'inflexion à tangente horizontale). Ex. : $f(x) = 3x^3 - 3x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = (3x - 1)^2 \geq 0$ partout : f est croissante sur $\mathbb{R}$, sans extremum bien que $f'(\frac{1}{3}) = 0$.

DÉFINITION 3.1 Dérivée seconde

$f''(x) = (f'(x))'$: la dérivée de la dérivée.

✓ **PROPRIÉTÉ 3.2** *Signe de $f'' \Rightarrow$ concavité et inflexion*

- $f''(x) > 0 \Rightarrow$ concavité vers le **haut** (bol $\cup$).
- $f''(x) < 0 \Rightarrow$ concavité vers le **bas** (cloche $\cap$).
- **Point d'inflexion** en $x_0 \iff f''(x_0)$ **change de signe** et $f'(x_0)$ existe.

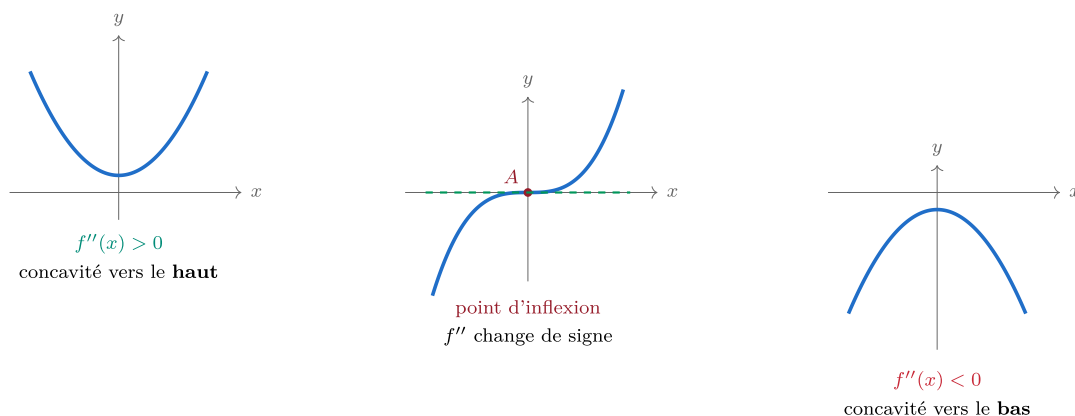


Figure 2 : les trois cas de concavité selon le signe de f'' .

≡ **COMMENT FAIRE** *Lire un graphe de f sans calcul*

- f monte $\Rightarrow f' > 0$; f descend $\Rightarrow f' < 0$; sommet/creux $\Rightarrow f' = 0$.
- courbe en « bol » $\Rightarrow f'' > 0$; courbe en « cloche » $\Rightarrow f'' < 0$.
- la courbe de f' coupe l'axe des x là où f a un extremum.

4 L'équation de la tangente

✓ **PROPRIÉTÉ 4.1** *Tangente en x_0*

Si f est dérivable en x_0 , la tangente à la courbe en $P_0(x_0, f(x_0))$ a pour équation

$$y = (x - x_0) f'(x_0) + f(x_0)$$

($f'(x_0)$ = pente, $f(x_0)$ = ordonnée du point de contact).

REMARQUE *Cas particuliers*

- $f'(x_0) = 0 \Rightarrow$ tangente **horizontale** : $y = f(x_0)$.
- deux droites de pentes m_1, m_2 sont **perpendiculaires** $\iff m_1 \times m_2 = -1$.

EXEMPLE *Tangente et perpendicularité*

Pour $f(x) = x - 3 \ln |x + 2|$ (donc $f'(x) = 1 - \frac{3}{x+2} = \frac{x-1}{x+2}$) :

- en $x = 1$: $f'(1) = 0 \Rightarrow$ tangente horizontale $y = 1 - 3 \ln 3$ (minimum) ;
- en $x = 0$: $f'(0) = -\frac{1}{2}$, tangente $y = -\frac{1}{2}x - 3 \ln 2$, perpendiculaire à $y = 2x + 1$ car $2 \times (-\frac{1}{2}) = -1$.

5 Méthode : étudier une fonction complète

COMMENT FAIRE *Marche à suivre*

- 1 domaine de définition D_f ;
- 2 calculer $f'(x)$ (formulaire) ;
- 3 résoudre $f'(x) = 0$, étudier le signe de $f' \Rightarrow$ tableau de variation ;
- 4 calculer $f''(x)$, étudier son signe $\Rightarrow$ concavité, inflexions ;
- 5 tangentes remarquables : $y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$.

🔗 **EXEMPLE** Application à $f(x) = x - 3 \ln |x + 2|$

Étape	Résultat
Domaine	$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$
Dérivée	$f'(x) = 1 - \frac{3}{x+2} = \frac{x-1}{x+2}$
Signe / variations	$f' > 0$ sur $] -\infty; -2[$, $f' < 0$ sur $] -2; 1[$, $f' > 0$ sur $]1; +\infty[$
Extremum	minimum local en $x = 1 : f(1) = 1 - 3 \ln 3$
Dérivée seconde	$f''(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$ partout : concavité vers le haut, pas d'inflexion
Tangente notable	horizontale en $x = 1 : y = 1 - 3 \ln 3$

6 Mémo

📌 MÉMO L'ESSENTIEL DE LA DÉRIVATION

Définition :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (\text{pente de la tangente, vitesse instantanée}).$$

Règles :

$$(C)' = 0, \quad (x)' = 1, \quad (U^n)' = nU^{n-1}U', \quad (U + V)' = U' + V',$$

$$(UV)' = U'V + UV', \quad \left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2},$$

$$(\sin U)' = U' \cos U, \quad (\cos U)' = -U' \sin U, \quad (\ln U)' = \frac{U'}{U}, \quad (a^U)' = U' a^U \ln a.$$

Tangente en x_0 : $y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0).$

Tableau récapitulatif des cas :

Signe	Conclusion
$f' > 0$	f croissante
$f' < 0$	f décroissante
$f' = 0$ en changeant de signe	extremum local (max si $+$ $\rightarrow$ $-$, min si $-$ $\rightarrow$ $+$)
$f' = 0$ sans changer de signe	pas d'extremum (tangente horizontale, inflexion possible)
$f'' > 0$	concavité vers le haut ($\smile$)
$f'' < 0$	concavité vers le bas ($\frown$)
$f'' = 0$ en changeant de signe	point d'inflexion

Fin de la fiche de révision — Fiche 5 : Dérivation.

— Fin de la synthèse · Dérivation —

simulationconcours.be

simulationconcours.be

simulationconcours.be

simulationconcours.be



Synthèse bouclée ? Vérifie que ça tient.



La théorie est condensée — il reste à la faire tomber dans tes automatismes :

Sur simulationconcours.be

- ✓ Le QCM blanc du chapitre, type concours, corrigé et expliqué
- ✓ Le carnet d'entraînement de la fiche, niveau par niveau
- ✓ Le cours complet si un point résiste — gratuit
- ✓ Toutes les autres synthèses du Pack Réussite

Tous les jeudis : simulation du concours en ligne

En conditions réelles — chrono, QCM type concours et score immédiat.



Rejoins-nous sur simulationconcours.be

scanne le QR ou tape l'adresse — les cours complets sont gratuits